

Übung zum Lehrkräfte Weiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe A2 (Parallelogramm)

Sei $\diamond ABCD$ ein Parallelogramm in der reellen Ebene, d.h. (in der analytischen Geometrie) vier Punkte derart, dass die Pfeile \vec{AB} und \vec{DC} zum gleichen Vektor \vec{b} und die Pfeile \vec{BC} und \vec{AD} zum gleichen Vektor \vec{d} gehören und \vec{b} und \vec{d} linear unabhängig (nicht parallel und ungleich $\vec{0}$) sind.

Zeigen Sie vektoriell: Die Diagonalen AC und BD schneiden sich!

Lösungsskizze

Sei A als Ursprung gewählt; dann sind \vec{b} und \vec{d} die Ortsvektoren von B bzw. D und $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ der Ortsvektor von C .

Die Gerade AC hat dann die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = s \vec{c} = s (\vec{b} + \vec{d}),$$

die Gerade BD (in der Zwei-Punkte-Form) die Darstellung

$$\vec{y} = \vec{b} + t (\vec{d} - \vec{b}).$$

Zu einem gemeinsamen Punkt von AC und BD existieren dann $s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$s (\vec{b} + \vec{d}) = \vec{b} + t (\vec{d} - \vec{b}),$$

also

$$(s - 1 + t) \vec{b} = (t - s) \vec{d}.$$

Die letzte Gleichung ist wegen der linearen Unabhängigkeit von \vec{b} und \vec{d} genau für $s = t = \frac{1}{2}$ erfüllt. Tatsächlich¹ liegt der Punkt mit Ortsvektor $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$ auf beiden Diagonalen.

¹Meta-Anmerkung: Auf Beweisrichtung achten!