

Klausur 2. Teil zur Lehrkräfteweiterbildung
'Lineare Algebra / Analytische Geometrie I' am 17.12.2018

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1 aus Teil 1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	Note
	zur anonymen Noten- veroeffentlichung	X					
Punkte							

Bearbeiten Sie bitte zwei der drei folgenden Aufgaben! Falls Sie alle drei Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche zwei Aufgaben gewertet werden sollen!** Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.

Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Das Resultat der 1. Teilklausur (Aufgabe 1) wird übernommen.

Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit, Basis, lineare Abbildung)

(i) (3,5 Punkte) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 := (1, 1, 0), \quad v_2 := (1, 0, 1) \quad \text{und} \quad v_3 := (1, \alpha, 2) \quad \text{aus} \quad \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig, für welche nicht?

(ii) (6,5 Punkte) Sei $f : V_1 \rightarrow V_2$ eine injektive lineare Abbildung des K -Vektorraums V_1 mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ in den K -Vektorraum V_2 . Zeigen Sie, dass dann die Vektoren $f(b_1), \dots, f(b_n)$ linear unabhängig sind!

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier benutzen: Ist f injektiv und linear, so $\text{Kern } f = \{0\}$.

Aufgabe 3 (Matrix-Darstellung, Rang, Rang einer linearen Abbildung)

Seien V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis (b_1, b_2, b_3, b_4) und W ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis (c_1, c_2, c_3, c_4) , ferner $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ mit

$$\begin{aligned} f(b_1) &= c_1 + c_3 \\ f(b_2) &= c_1 + c_2 \\ f(b_3) &= c_3 + c_4 \\ f(b_4) &= c_1 + c_2\alpha. \end{aligned}$$

1. (2,5 Punkte) Geben Sie die Matrix $M := M_C^B(f)$ von f bzgl. des Basispaars (B, C) an!
2. (1,5 Punkte) Berechnen Sie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ohne Begründung!), und geben Sie damit oder direkt $f(v_0)$ für $v_0 := b_1 + b_2 - b_3 - b_4$ an!
3. (4 Punkte) Bestimmen Sie $\text{Rang}(M)$ und $\text{Rang}(f)$ in Abhängigkeit von α .
4. (2 Punkte) Für welche Werte α ist f ein Isomorphismus, für welche nicht?

Aufgabe 4 (Lineares Gleichungssystem, elementare Zeilenumformungen)

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$(*) \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1 \\ \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4 = 1 \\ \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \alpha\xi_4 = \alpha + 1 \end{cases}$$

- (i) (1,5 Punkte) Geben Sie (ohne Begründung) die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix A_{erw} von $(*)$ an!
- (ii) (2 Punkte) Führen Sie A_{erw} durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $\widehat{A_{\text{erw}}}$ in Zeilenstufenform über.

Lösungshinweis zu (iii)-(v): Sie dürfen unbewiesen verwenden, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen weder der Rang der Matrix noch der Lösungsraum des zugehörigen Gleichungssystems ändert.

- (iii) (2 Punkte) Untersuchen Sie (in Abhängigkeit von α) die Lösbarkeit von $(*)$ mittels des in der Vorlesung behandelten Lösbarkeitskriteriums!
- (iv) (2 Punkte) Bestimmen Sie im Fall $\alpha = 0$ den Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems $(**)$!
- (v) (1,5 Punkte) Bestimmen Sie (im Fall $\alpha = 0$) eine Partikulärlösung von $(*)$.
- (vi) (1 Punkt) Geben Sie (ebenfalls im Fall $\alpha = 0$) den Lösungsraum L von $(*)$ an!

Lösungsskizzen:

Zu Aufgabe 2

- (i) Aus dem Ansatz

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

erhält man das homogene lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases},$$

aus dem u.a. (durch Addition von Zeile 2 und Zeile 3 und Subtraktion von Zeile 1) folgt:

$$(\alpha + 1)\lambda_3 = 0.$$

Ist $\alpha \neq -1$, so ergibt sich $\lambda_3 = 0$ und mit Zeile 2 und Zeile 3 dann auch $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Im Falle $\alpha \neq -1$ sind also v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

Um zu zeigen, dass im Falle $\alpha = -1$ die gegebenen Vektoren linear abhängig sind, suchen wir eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors, d.h. eine nicht-triviale Lösung des Systems (*). Wegen der Homogenität von (*) wählen wir $\lambda_3 = 1$ und erhalten aus (*) dann $\lambda_1 = -\alpha = 1$ sowie $\lambda_2 = -2$.

Notwendige Probe: Umgekehrt ist $(1, -2, 1)$ eine Lösung von (*) und

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$$

eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors mittels v_1, v_2, v_3 .

Alternative Lösung mittels Determinante ...

- (ii) Sei $\sum_{i=1}^n f(b_i)\lambda_i = 0$ eine Linearkombination des Nullvektors von V_2 . Zu zeigen ist, dass die Koeffizienten λ_i alle 0 sind. Wegen der Linearität von f gilt:

$$0 = \sum_{i=1}^n f(b_i)\lambda_i = f\left(\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i\right);$$

das heißt: $\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i \in \text{Kern}f$. Wegen der Injektivität von f ist aber

$\text{Kern}f = \{0\}$ (s. Lösungshinweis), also $\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i = 0$. Da B Basis von V_1 ist, kann diese Linearkombination nur trivial sein. Es folgt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Zu Aufgabe 3

1. In der j -ten Spalte von $M = M_C^B(f)$ stehen die Koordinaten von $f(b_j)$ bzgl. der Basis C . Damit erhält man

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Koordinatenvektor von v_0 ist, folgt

$$f(v_0) = c_1 + (1 - \alpha)c_2 - c_4.$$

Alternativ direkt:

$$\begin{aligned} f(v_0) &= f(b_1 + b_2 - b_3 - b_4) = f(b_1) + f(b_2) - f(b_3) - f(b_4) = \\ &= c_1 + c_3 + c_1 + c_2 - c_3 - c_4 - c_1 - c_2\alpha = c_1 + (1 - \alpha)c_2 - c_4. \end{aligned}$$

3. Aus dem Ansatz

$$(*) \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man zunächst durch Setzung von $\rho = 0$ aus Zeile 4 dann $\nu = 0$, aus Zeile 3 auch $\lambda = 0$ und aus der ersten Zeile $\mu = 0$. Dies zeigt die lineare Unabhängigkeit der ersten 3 Spalten von M und damit

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M \geq 3.$$

Im Fall $\alpha = 1$ sind die 2. und 4. Spalte von M gleich. Es folgt

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M = 3.$$

Ist aber $\alpha \neq 1$, so folgt aus (*) dann $\nu = 0$ (s. 4. Zeile), $\lambda = 0$ (s. 3. Zeile) und $\mu = \rho = 0$ aus Zeilen 2 und 1. Im Fall $\alpha \neq 1$ gilt also

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M = 4.$$

Alternativ mittels elementarer Zeilenumformungen

Durch elementare Zeilenumformungen

(z.B. $z'_3 = z_3 - z_4$ und $z'_1 = z_1 - (z_2 + z'_3)$) erhält man aus M z.B.

$$M \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Da sich der Rang einer Matrix bei elementaren Zeilenumformungen nicht ändert, folgt aus der Zeilenstufenform

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M = 3 \quad \text{falls } \alpha = 1$$

und

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M = 4 \quad \text{falls } \alpha \neq 1.$$

Alternativ mittels Determinanten:

Durch Entwicklung von $\det M$ nach der 4. Zeile erhält man:

$$\det M = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = 1 - \alpha.$$

Dies zeigt, dass M und f für $\alpha \neq 1$ vollen Rang (also Rang 4) haben.

Ist $\alpha = 1$, so $\text{Rang } M \leq 3$; wegen dreier unabhängiger Spalten von M ist $\text{Rang } M \geq 3$, insgesamt also: $\text{Rang } f = \text{Rang } M = 3$.

4. Im Fall $\alpha \neq 1$ ist $\text{Rang } M = 4$, also $\dim_{\mathbb{R}} f(V) = 4 = \dim_{\mathbb{R}} W$, d.h. ist f surjektiv und damit bijektiv.
Im Fall $\alpha = 1$ ist f wegen $\dim_{\mathbb{R}} f(V) = 3 < \dim_{\mathbb{R}} W$ kein Isomorphismus.

Zu Aufgabe 4

(i) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \alpha & \alpha + 1 \end{array} \right).$$

(ii) Durch Subtraktion der Zeile 1 von den Zeilen 2 und 3 erhält man:

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \alpha & \alpha + 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \widehat{A_{\text{erw}}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 & \alpha \end{array} \right)$$

(iii) Im Fall $\alpha \neq 1$ ist $\text{Rang } A = 3 = \text{Rang } A_{\text{erw}}$ und damit (*) nach dem Lösbarkeitskriterium lösbar. Im Fall $\alpha = 1$ ist

$$\text{Rang } A = 2 \neq \text{Rang } A_{\text{erw}}$$

und damit (*) nicht lösbar.

(iv) Ist $\alpha = 0$, so folgt aus der zweiten Zeile der Matrix $\widehat{A_{\text{erw}}}$ in Stufenform für eine Lösung des homogenen Systems $\xi_2 = \xi_3$ und aus der dritten Zeile $\xi_4 = 0$. Einsetzen in die erste Zeile liefert $\xi_1 + 3\xi_2 = 0$ und damit (nach der Probe wegen der Beweisrichtung)

$$L_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

(v) Aus der Matrix $\widehat{A_{\text{erw}}}$ in Zeilenstufenform erhält man (im Falle $\alpha = 0$) wieder $\xi_2 = \xi_3$ und $\xi_4 = 0$. Einsetzen in die 1. Zeile liefert durch Setzung $\xi_2 = 0$ (und Probe !) dann als eine Partikulärlösung:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Partikulärlösung erhält man eventuell auch durch genaues Hinsehen.

- (vi) Aus (iv) und (v) ergibt sich für $\alpha = 0$ mittels des Satzes über den Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems:

$$L = p + L_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$