

4. Übung zur Algebra und Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrer

Dozent: V.Schulze

Aufgabe 13

Es sei \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{R}^p := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen.

Man zeige:

(i) (\mathbb{R}^p, \cdot) ist eine Gruppe.

(ii) (\mathbb{R}^p, \cdot) und $(\mathbb{R}, +)$ sind isomorph.

(Eigenschaften der Exponentialfunktionen oder des Logarithmus dürfen benutzt werden.)

Aufgabe 14

Es sei \mathbb{Q}^p die Menge der positiven rationalen Zahlen.

Dann ist (\mathbb{Q}^p, \cdot) eine Gruppe.

Die Abbildung $f : \mathbb{Q}^p \rightarrow \mathbb{Q}^p$ sei definiert durch $f(r) := r^2$ für alle $r \in \mathbb{Q}^p$.

Ist f ein Gruppenhomomorphismus?

Aufgabe 15

Ist f aus Aufgabe 14 ein Gruppenisomorphismus?

Aufgabe 16

Es sei \mathbb{R}^0 die Menge der von Null verschiedenen reellen Zahlen.

Man zeige: Die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und (\mathbb{R}^0, \cdot) sind nicht isomorph.

Hinweis: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^0$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt stets $f(r) = f(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}) = f(\frac{r}{2}) \cdot f(\frac{r}{2})$.