Sind $v_1, \ldots, v_n$ (mit $v_i \in V$) linear abhängig oder unabhängig?

Ausgangspunkt einer gemeinsamen Heuristik: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$

Nachweis der linearen Unabhängigkeit

Ansatz: Sei $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$.
Zu zeigen ist:
$\lambda_i = 0$
für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

Falls $v_i = \vec{v_i} \in K^n$ (oder $\vec{v_i}$ Koordinatenvektoren von v_i) dann:
koordinatenweise Betrachtung:
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v_i} = 0 \to$ LGS $(*)$
zu zeigen:
$(*)$ hat nur die triviale Lösung

Falls die v_i Funktionen sind:

$\to$ LGS, erhalten durch Einsetzen von Funktionswerten

Evtl. mehr Gleichungen durch Differenzieren (falls möglich)

Falls $v_i \in K[X]$: Betrachtung der Anzahl der Nullstellen des Polynoms $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$!

Nachweis der linearen Abhängigkeit

$n > \dim_K V$

Es existiert eine nicht-triviale Lösung $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$.

Beweisrichtung beachten!!

Anmerkungen:

1. $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig oder nicht paarweise verschieden.

2. Falls $M \subseteq V$ so gilt *laut Definition*:
   M ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Jede endliche Teilmenge von M ist linear unabhängig.