Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra I'

Aufgabe F5 (Lineares Gleichungssystem)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{rrrrcc} \xi_1 & +\xi_2 & & -\xi_4 & = & 1 \\ & 2\xi_2 & +\xi_3 & +\xi_4 & = & 2\alpha+1 \\ 2\xi_1 & +2\xi_2 & +2\xi_3 & & = & 4 \end{array}\right.$$

über $\mathbb{R}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$).

(i) Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix A von $(*)$ und welchen Rang die erweiterte Koeffizientenmatrix A_{erw} ? (Antwort jeweils bitte mit ganz kurzer Begründung)?

(ii) Begründen Sie (unter Verwendung von Teil (i) und mit Hilfe eines Satzes) die Lösbarkeit von $(*)$!

(iii) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $(*)$?
Anmerkung: Sie dürfen hier die entsprechende Dimensionsformel verwenden.

(iv) Bestimmen Sie den Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems, und bestimmen Sie den Lösungsraum L von $(*)$!

(v) Wie lässt sich L geometrisch interpretieren?

Lösungsskizze

(i) Die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2\alpha+1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Da die ersten drei Spalten von A linear unabhängig sind (dies sieht man z.B. durch elementare Zeilenumformungen; vgl. mit der Matrix in (iv) !), folgt rg $A = 3$.
Der Rang der erweiterten Matrix ist ebenfalls 3, da die Spalten der Matrix in $\mathbb{R}^3$ liegen, also höchstens drei von ihnen linear unabhängig sein können.

(ii) Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\text{rg } A = \text{rg } A_{\text{erw}}.$$

Nach (i) ist dies für $(*)$ der Fall.

(iii) Im Falle der Lösbarkeit eines Linearen Gleichungssystems gilt

$$\dim_K L = \dim_K L_0 = n - \text{rg } A$$

(wobei A die Koeffizientenmatrix und n die Anzahl der Variablen bezeichnet). Im vorliegenden Fall ist rg $A = 3$ und $n = 4$, womit sich $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$ ergibt.

(iv) Durch elementare Zeilenumformung erhält man aus

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2\alpha+1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad \text{z.B.} \quad \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2\alpha+1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

So erhält man das Gleichungssystem (mit dem gleichen Lösungsraum):

$$(*') \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \xi_1 & +\xi_2 & & -\xi_4 & = & 1 \\ & 2\xi_2 & +\xi_3 & +\xi_4 & = & 2\alpha+1 \\ & & 2\xi_3 & +2\xi_4 & = & 2 \end{array} \right. .$$

Setzt man im zugehörigen homogenen System z.B. $\xi_2 = 0$ (und damit laut erster Zeile $\xi_1 = \xi_4$ und laut zweiter Zeile $\xi_3 = -\xi_4$), so sieht man, dass dessen $1-\dim$ Lösungsraum gleich $L_0 = (1, 0, -1, 1)\mathbb{R}$ ist, was eine wegen der Beweisrichtung nötige Probe (insbesondere bei der 3.Zeile) bestätigt.

Setzt man ferner in $(*')$ z.B. $\xi_4 = 0$, so erhält man aus Zeile drei $\xi_3 = 1$ und als eine Partikulärlösung von $(*)$ dann : $x_p = (1 - \alpha, \alpha, 1, 0)$. Insgesamt ergibt sich:

$$L = (1 - \alpha, \alpha, 1, 0) + (1, 0, -1, 1)\mathbb{R}.$$

(v) L ist eine Gerade im $4 - \dim$ reellen affinen Raum $\text{AG}(\mathbb{R}^4)$.