Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra I'

Aufgabe F4 (Lineares Gleichungssystem)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{cccccc} \xi_1 & & +2\xi_3 & = & 1 \\ 3\xi_1 & +2\xi_2 & +\alpha\xi_3 & = & 5 \\ & \xi_2 & +\ \xi_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

über $\mathbb{R}$.

Geben Sie den Lösungsraum L von $(*)$ für folgende Fälle an:

(a) $\alpha = 6$

(b) $\alpha = 8$

Lösungsskizze:

Die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ ist $A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \mid 1 \\ 3 & 2 & \alpha & \mid 5 \\ 0 & 1 & 1 & \mid 1 \end{pmatrix}$.

Durch elementare Zeilumformungen erhält man nacheinander

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \mid 1 \\ 0 & 2 & \alpha-6 & \mid 2 \\ 0 & 1 & 1 & \mid 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \mid 1 \\ 0 & 2 & \alpha-6 & \mid 2 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\alpha}{2}+3 & \mid 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Da elementare Zeilenumformungen den Lösungsraum nicht ändern, erhält man im Fall $\alpha = 6$, dass der Lï¿½sungsraum L_1 von $(*)$ gleich dem des LGS's

$$(*_1)\quad \left\{\begin{array}{cccccc} \xi_1 & & +2\xi_3 & = & 1 \\ & 2\xi_2 & & = & 2 \\ & & \xi_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

ist, woraus $L_1 = \{(1,1,0)\}$ folgt.

(b) Im Fall $\alpha = 8$ sind die Lösungen von $(*)$ genau die Lösungen von

$$(*_2)\quad \left\{\begin{array}{cccccc} \xi_1 & & +2\xi_3 & = & 1 \\ & \xi_2 & +\ \xi_3 & = & 1 \end{array}\right. .$$

Setzt man nun $\xi_3 = 0$, so sieht man, dass z.B. $x_p = (1,1,0)$ eine Lösung von $(*_2)$ und damit von $(*)$ ist.

Der Lösungsraum L_{20} des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems ist gleich dem Lösungsraum des zu $(*_2)$ gehörenden homogenen Systems, also von

$$(*_2')\quad \left\{\begin{array}{cccccc} \xi_1 & & +2\xi_3 & = & 0 \\ & \xi_2 & +\ \xi_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Es folgt $L_{20} = \{(-2\xi_3, -\xi_3, \xi_3) | \xi_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-2,-1,1)\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = (-2,-1,1)\mathbb{R}$.

Der Lösungsraum L_2 von $(*_2)$ und damit von $(*)$ ist nach einem Satz gleich $x_P + L_{20}$, also

$$L_2 = (1,1,0) + (-2,-1,1)\mathbb{R}.$$