

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra I'

Aufgabe F2 (Lineares Gleichungssystem, geometrische Interpretation)

- (a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen s und t , für die das folgende reelle lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt:

$$(*) \begin{cases} 4\xi_1 + 6\xi_2 + 2\xi_3 = 2 \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + t\xi_3 = s \end{cases}$$

- (b) Interpretieren Sie die Situation von Teil (a) geometrisch!
Hinweis: Eigenschaften von Ebenen, Normalenvektoren und Parallelität in $AG(\mathbb{R}^3)$ dürfen Sie unbewiesen benutzen.

Lösungsskizze

- (a) Das Gleichungssystem (*) ist genau dann nicht lösbar, wenn seine Koeffizientenmatrix anderen Rang hat als seine erweiterte Koeffizientenmatrix, wenn also gilt:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & t \end{pmatrix} < \text{Rang} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & t & s \end{array} \right).$$

Da beide Matrizen höchstens Rang 2 haben (2 Zeilen!) und die linke mindestens Rang 1, muss die linke Matrix zum Erfüllen der geforderten Eigenschaft von (*) genau Rang 1 und die rechte genau Rang 2 haben. Dies ist nur der Fall, wenn $t = 1$ ist und $s \neq 1$.

- (b) Das LGS (*) ist nicht lösbar, wenn die beiden durch die Gleichungen bestimmten Ebenen von $AG(\mathbb{R}^3)$ parallel und verschieden sind. Parallelität bedeutet, dass die beiden Normalenvektoren der Ebenen, also die Zeilen der Koeffizientenmatrix, linear abhängig sind, woraus $t = 1$ folgt; und Verschiedenheit der Ebenen heißt, dass die Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix nicht linear voneinander abhängen, also $s \neq 1$ ist.