Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra I'

Aufgabe D9 (Lineare Fortsetzung, reguläre Matrix)

(i) Seien $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ Basen des K-Vektorraums V. Begründen Sie: Es gibt einen Endomorphismus f von V derart, dass gilt:

$$(*)\ f(b_1 - b_2) = c_1 \ \text{ und } \ f(b_1 - b_2 + b_3) = c_1 + c_2 \ \text{ sowie } \ f(2b_2 - b_3) = c_3.$$

(ii) Geben Sie $M_C^B(f)$ (für f aus (i)) an !

(iii) Ist f (mit f aus (i)) regulär ?

Lösungsskizze:

(i) Da f linear sein soll, ist $(*)$ äquivalenz zu

$$(*')\ \left\{ \begin{array}{ccccccc} f(b_1) & -f(b_2) & & = & c_1 & & \\ f(b_1) & -f(b_2) & +f(b_3) & = & c_1+ & c_2 & \\ & 2\,f(b_2) & -f(b_3) & = & & & c_3 \end{array} \right. .$$

Durch Substraktion der ersten von der zweiten Zeile erhält man $f(b_3) = c_2$; aus der dritten Gleichung ergibt sich damit $f(b_2) = \frac{1}{2}(c_2 + c_3)$ und schließlich aus der ersten Zeile $f(b_1) = c_1 + \frac{1}{2}(c_2 + c_3)$.

Probe (wichtig wegen Beweisrichtung): Umgekehrt erfüllt eine lineare Abbildung f mit

$$(*'')\ \left\{ \begin{array}{cccc} f(b_1) & = & c_1+ & \frac{1}{2}(c_2 + c_3) \\ f(b_2) & = & & \frac{1}{2}(c_2 + c_3) \\ f(b_3) & = & & c_2 \end{array} \right.$$

die Bedingung $(*)$.

Wir sehen nun mit Hilfe des Satzes über die lineare Fortsetzung, dass eine lineare Abbildung f der geforderten Eigenschaften existiert.

(ii) Die Spalten von $M_C^B(f)$ sind die Koordinaten (bzgl. C) der Bilder der Vektoren von B unter f. Somit gilt:

$$M := M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Durch die (den Rang erhaltenden) Vertauschung der 2. mit der 3. Zeile von M erhält man eine obere Dreiecksmatrix mit nicht-trivialen Diagonalelementen. Eine solche Matrix (und mit ihr M und f) ist regulär.

Alternativ: Wegen $\det M_C^B(f) = -\frac{1}{2} \neq 0$ ist f regulär.