Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra I'

Aufgabe D5 (Endomorphismus, Matrixdarstellung)

Sei f ein Endomorphismus des $K-$ Vektorraums V. Zeigen Sie: Gilt für alle $v \in V$ die Aussage $f(v) \in < v >$, so existiert ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$. Bestimmen Sie ferner im endlichdimensionalen Fall $M_B^B(f)$ für eine Basis B von V.

Lösungsskizze
Sei zunächst $\dim_K V = 1$. Dann ist $V =< v_0 > = \{\lambda v_0 \mid \lambda \in K\}$. Wegen $f(v_0) \in V =< v_0 >$, existiert ein $\lambda \in K$ mit $f(v_0) = \lambda \cdot v_0$. Ist $v \in < v_0 >$, also $v = \mu v_0$ für geeignetes μ, so folgt wegen der vorausgesetzten Linearität von f:

$$f(v) = f(\mu v_0) = \mu f(v_0) = \mu \lambda v_0 = \lambda(\mu v_0) = \lambda v = \lambda \text{ id } (v)$$

und damit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Sei nun $\dim_K V > 1$, seien $v_1, v_2 \in V$ zwei Basisvektoren und $f(v_1) \in < v_1 >$, $f(v_2) \in < v_2 >$ sowie $f(v_1 + v_2) \in < v_1 + v_2 >$. Es gibt daher $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ mit $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ und $f(v_2) = \lambda_2 v_2$ sowie $f(v_1 + v_2) = \lambda_3(v_1 + v_2)$. Da $f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$, folgt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_1 + \lambda_3 v_2$. Wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung folgt daraus $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda$. Im endlichdimensionalen Fall erhält man:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$