Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra I'

Aufgabe D4 (Produkt zweier Geradenspiegelungen)

Zeigen Sie analytisch (also mit Mitteln der Linearen Algebra):
In $\mathbb{R}^2$, versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt, ist das Produkt (d.h. die Hintereinanderausführung) zweier Geradenspiegelungen mit zueinander orthogonalen Achsen eine Punktspiegelung (Drehung um 180°).
Lösungshinweis: Wählen Sie einen geeigneten Punkt als Nullpunkt und eine geeignete Basis!

Lösungsskizze

(i) Seien g_1 bzw. g_2 die Achsen der beiden gegebenen Spiegelungen s_1 und s_2. Man wählt dann $g_1 \cap g_2$ als Nullpunkt und Einheitsvektoren b_1 und b_2 in Richtung von g_1 bzw. g_2 als Basis B.

(ii) Weil b_i auf der Achse von s_i liegt, haben die Matrizen $M_i := M_B^B(s_i)$ die Form

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt $s_2 \circ s_1$ hat dann als Matrix das Produkt der Matrizen $M_2 \cdot M_1$, also:

$$M_B^B(s_2 \circ s_1) = M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2.$$

Daher ist $s_2 \circ s_1 = -\mathrm{id}$, also Punktspiegelung.

Alternative zu (ii):
Es ist $s_2 \circ s_1(b_1) = s_2(b_1) = -b_1$ und $s_2 \circ s_1(b_2) = s_2(-b_2) = -b_2$; da $s_2 \circ s_1$ als Produkt linearer Abbildungen linear ist, folgt $s_2 \circ s_1 = -\mathrm{id}$; es ist $s_2 \circ s_1$ also Punktspiegelung. □