Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra I'

Aufgabe D2 (Matrix einer linearen Abbildung)

Sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis des K-Vektorraums V, $C = (c_1, c_2)$ eine Basis des K-Vektorraums W und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit

$$f(b_1 - b_2) = 3\,c_1 \text{ und } f(b_1 + b_2 - 2b_3) = -c_1 + 2\,c_2 \text{ sowie } f(b_2 + b_3) = 5\,c_2.$$

Bestimmen Sie $M_C^B(f)$!

Lösungsskizze
Da f linear ist, gilt

$$\left\{ \begin{array}{llllll} f(b_1) & -f(b_2) & & = & 3\,c_1 & \\ f(b_1) & +f(b_2) & -2\,f(b_3) & = & -c_1 + & 2\,c_2 \\ & f(b_2) & +f(b_3) & = & & 5\,c_2 \end{array} \right. .$$

Durch Addition der ersten zur zweiten bzw. dritten Zeile erhält man
$2\,f(b_1) - 2\,f(b_3) = 2\,c_1 + 2\,c_2$ und $f(b_1) + f(b_3) = 3\,c_1 + 5\,c_2$ und daraus
$4\,f(b_1) = 8\,c_1 + 12\,c_2$, somit $f(b_1) = 2\,c_1 + 3\,c_2$.
Es folgt $f(b_2) = f(b_1) - 3\,c_1 = -c_1 + 3\,c_2$ und $f(b_3) = 5\,c_2 - f(b_2) = c_1 + 2\,c_2$.
Die Spalten von M_C^B sind die Koordinaten (bzgl. C) der Bilder der Vektoren von B. Somit gilt:

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$