Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe C 5(Basis, Basis-Ergänzung)

Sei $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \vec{b_4}\}$ Basis eines $\mathbb{R}$–Vektorraumes V; seien ferner

$$\vec{a_1} = 2\vec{b_1} - \vec{b_2},\ \vec{a_2} = \vec{b_2} + \vec{b_3} + \vec{b_4},\ \vec{a_3} = \vec{b_3} - \vec{b_4}$$

und $U = \langle \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \rangle$ der von $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ aufgespannte Unterraum.

(a) Zeigen Sie: $A = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ ist eine Basis von U.
(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x} = 6\vec{b_1} - 5\vec{b_2} - 4\vec{b_4}$ bezüglich A.
(c) Ergänzen Sie A zu einer Basis von V.

Lösungsskizze

(a) A spannt U nach Definition auf. Zu zeigen ist nur, dass A linear unabhängig ist.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}_B = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

(b) Aus $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}_B$ folgt $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$.

So erhält man $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_A$.

(c) Wegen $\dim V > \dim U$ können nicht alle Vektoren aus B in U sein. Z.B. ist $b_4 \notin U$. Daher ist $A \cup \{b_4\}$ Basis von V.