Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe C3 (Lineare Unabhängigkeit binär)

(i) Gegeben seien die Vektoren p_1 bis p_9 aus ${\mathbb{F}_2}^9$ mit:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
p_1 & := & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
p_2 & := & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
p_3 & := & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
p_4 & := & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_5 & := & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_6 & := & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
p_7 & := & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
p_8 & := & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_9 & := & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Zeigen Sie, dass diese Vektoren linear abhängig sind!
Lösungshinweis: Kombinieren Sie geeignete dieser Vektoren zum Nullvektor!
(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren q_1, q_2, q_3 und q_4 aus ${\mathbb{F}_2}^5$ linear unabhängig sind:

$$
\begin{array}{lcccccc}
q_1 & := & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
q_2 & := & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
q_3 & := & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
q_4 & := & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Lösungsskizze

(i) Z.B. addieren sich p_1, p_3 und p_8 zum Nullvektor; auch gilt $p_2 + p_4 + p_7 + p_9 = 0$. Wenn man diese Abhängigkeiten nicht durch Ausprobieren findet, muss man das folgende Lineare Gleichungssystem lösen, das sich aus $\sum_{i=1}^{9} c_i p_i = 0$ ergibt:

$$
\begin{array}{llllllllll}
c_1+ & c_2+ & c_3+ & c_4+ & c_5 & & & & & = 0 \\
 & c_2+ & c_3+ & c_4+ & c_5+ & & c_7+ & c_8+ & c_9 & = 0 \\
c_1+ & & c_3+ & & & & c_7+ & & c_9 & = 0 \\
 & & & c_4+ & & & & & c_9 & = 0 \\
 & c_2+ & & & & c_6+ & & & c_9 & = 0 \\
 & & & & & c_6 & & & & = 0 \\
 & c_2+ & & & & & c_7 & & & = 0 \\
c_1+ & & c_3 & & & & & & & = 0
\end{array}
$$

(ii) Aus $c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 + c_4 q_4 = 0$ mit $c_i \in \mathbb{F}_2$ ergibt sich durch Komponentenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{lllll}
c_1 & +c_2 & & & = 0 \\
c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 & = 0 \\
 & & & c_4 & = 0 \\
c_1 & & & +c_4 & = 0 \\
 & & & c_4 & = 0,
\end{array}
$$

das nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ hat. Daher sind q_1, q_2, q_3, q_4 linear unabhängig.