

## Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

### Aufgabe C2 (Lineare Unabhängigkeit)

Seien  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$  Vektoren der reellen euklidischen Ebene. Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear unabhängig? Sind  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antworten (ohne Verwendung von Dimensionsargumenten)!

---

### Lösungsskizze:

Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind linear unabhängig.

Denn aus  $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$  folgt  $\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases}$  und daraus  $\lambda = \mu = 0$ .

Die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind linear abhängig:

Falls man nicht sofort sieht, dass  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$  gilt, hilft folgende

*Heuristik:* Aus  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ 2\lambda + \mu \end{pmatrix}$  ergibt sich  $\begin{cases} \lambda + 2\mu = 2 \\ 2\lambda + \mu = 2 \end{cases}$  und daraus  $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$ .

*Probe* (entscheidend wegen der Beweisrichtung):

$$\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}.$$