Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe B6 (Untergruppe, Unterraum)

(i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$G = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in {\mathbb{F}_2}^n \mid \bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_i = 0\}$$

aller Vektoren gerader "Parität" von ${\mathbb{F}_2}^n$ eine Untergruppe von $({\mathbb{F}_2}^n, \oplus)$ ist.

(ii) Begründen Sie, dass jede Untergruppe U von $({\mathbb{F}_2}^n, \oplus)$ auch einen Unterraum von $({\mathbb{F}_2}^n, \oplus, \underset{\mathbb{F}_2}{\cdot})$ bildet.

Lösungsskizze

(i) Wegen $(0, \ldots, 0) \in G$ ist $G \neq \emptyset$.
Ferner gilt in $\mathbb{F}_2$ die Gleichung $-1 = 1$; daher reicht es für den Nachweis der Voraussetzungen des Untergruppenkriteriums, die Abgeschlossenheit von G bzgl. $\oplus$ zu zeigen:

Aus $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n), (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in G$ folgt $\bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_i = 0 = \bigoplus_{i=1}^{n} \eta_i$ und daraus $\bigoplus_{i=1}^{n} (\gamma_i \oplus \eta_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \eta_i = 0$, also $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \oplus (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in G$.

(ii) $(\mathbb{F}_2^n, \oplus, \underset{\mathbb{F}_2}{\cdot})$ ist ein Vektorraum. $(U, \oplus)$ ist nach Voraussetzung Untergruppe der kommutativen Gruppe $({\mathbb{F}_2}^n, \oplus)$ und damit nicht-leer und abgeschlossen bzgl. Addition. Auch bzgl. S-Multiplikation ist U abgeschlossen. Daher ist U nach dem Unterraumkriterium Unterraum von $(\mathbb{F}_2^n, \oplus, \underset{\mathbb{F}_2}{\cdot})$.

Anmerkung: Dabei verwenden wir:
$1 \cdot (\gamma_1, \ldots \gamma_n) = (1 \cdot \gamma_1, \ldots, 1 \cdot \gamma_n) = (\gamma_1, \ldots \gamma_n)$, also $1g = g$ und
$0 \cdot (\gamma_1, \ldots \gamma_n) = (0 \cdot \gamma_1, \ldots, 0 \cdot \gamma_n) = (0, \ldots, 0)$, d.h. $0g = 0$.