

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra / Analytische Geometrie I'

Aufgabe B3 (Vektorraumgesetze)¹

Betrachten Sie folgende Kandidaten $(V, +, \cdot_K)$ für K -Vektorräume und geben Sie gegebenenfalls an, welche Vektorraumgesetze verletzt sind. (Mit Gegenbeispiel, aber ohne Nachweis der Richtigkeit eines Gesetzes).

- (i) $V_1 = (\mathbb{R}, +, *)$ mit $K = \mathbb{R}$, der üblichen Addition "+" auf \mathbb{R} und der S-Multiplikation

$$\alpha * x := \alpha^2 \cdot x.$$

- (ii) $V_2 = (\mathbb{R}^2, +, *)$ mit $K = \mathbb{R}$, komponentenweiser Addition "+", also

$$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) := (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2),$$

und

$$\alpha * (\beta, \gamma) := (\alpha \cdot \beta, 0).$$

- (iii) $V_3 = (\mathbb{R}, +, *)$ mit $K = \mathbb{Q}$, der üblichen Addition "+" auf \mathbb{R} sowie

$$\alpha * x := \alpha \cdot x.$$

Lösungsskizze

- (i) In V_1 ist das folgende Distributivgesetz verletzt:

$$(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v;$$

Beispiel (mit $\alpha = \beta = v = 1$):

$$(1 + 1) * 1 = 2 * 1 = 4 \cdot 1 = 4,$$

aber

$$1 * 1 + 1 * 1 = 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 2.$$

(Anmerkung: Alle anderen Vektorraum-Gesetze sind erfüllt.)

¹frei nach P.R.Halmos: Linear Algebra Problem Book. The Mathematical Association of America 1995.

- (ii) Das Verhalten der 1 entspricht nicht dem entsprechenden Vektorraumgesetz:

$$1 * (\beta, \gamma) = (1 \cdot \beta, 0) = (\beta, 0) \neq (\beta, \gamma) \text{ für } \gamma \neq 0.$$

(Anmerkung: Alle anderen Vektorraum-Gesetze sind erfüllt.)

- (iii) $V_3 = (\mathbb{R}, +, *)$ ist tatsächlich ein \mathbb{Q} -Vektorraum. Denn $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe und die übrigen Vektorraumgesetze gelten, da sie in \mathbb{R} gültig sind und die Einschränkung der Skalare auf \mathbb{Q} diese nicht ändern.

Anmerkung: Allgemeiner gilt: Ist K Unterkörper eines Körpers L , so ist $(L, +, *)$ mit der Addition "+" von L und der Definition $\lambda * v := \lambda \cdot v$ stets ein K -Vektorraum.