Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe A5 (Flächeninhalt, Vektorprodukt)

In der reellen euklidichen Ebene sei das Dreieck ΔABC gegeben durch die Ortsvektoren von A, B bzw. C mit den kartesischen Koordinaten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt F von ΔABC

1. mithilfe der Formel $F = \frac{1}{2}(g \cdot h)$ (mit der Länge g einer Seite von ΔABC und der Länge h der zugehörigen Höhe)
2. mithilfe Vektorprodukt oder Determinante!

Lösungsskizze

1. Es gilt z.B.

$$g = |\vec{a} - \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Sei $P \in AB$ mit Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ der Fußpunkt des Lots von C auf AB. Dann ist $h = |\vec{c} - \vec{p}|$ und $CP \perp AB$, also $(\vec{p} - \vec{c})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Damit ergibt sich

$$0 = (\vec{p} - \vec{c})(\vec{a} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} p - 5 \\ q - 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -p + 5 + q - 9 = q - p - 4$$

sowie (wegen $P \in AB$) mit der Punkt-Richtungsgleichung für AB:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \vec{b} + r(\vec{a} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - r \\ 1 + r \end{pmatrix} \quad \text{für ein geeignetes } r \in \mathbb{R}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $4 = q - p = 1 + r - (2 - r) = 2r - 1$, also $r = \frac{5}{2}$, ferner $p = 2 - r = -\frac{1}{2}$ und $q = 1 + r = \frac{7}{2}$.

Umgekehrt erfüllt der Punkt mit Ortsvektor $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ die Bedingungen $P \in AB \perp CP$ an P. Daher gilt:

$$h = |\vec{c} - \vec{p}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{11}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{11}{2}\sqrt{2}$$

und

$$F = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{11}{2}\sqrt{2} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}.$$

2. *Vorbemerkung:* Wir haben hier unter anderem die folgenden weiteren Möglichkeiten zur Berechnung der Dreiecksfläche, nämlich mittels

   (i) Berechnung einer Parallelogrammfläche im 2-dim mit der Determinante,

   (ii) Berechnung einer Parallelogrammfläche im 3-dim mit dem Vektorprodukt,

   (iii) Berechnung des Volumens eines Spats mit der Determinante (dem Spatprodukt).

   Wir gehen hier kurz auf diese Fälle ein:

   ad (i) Das von den Vektoren $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{y} = \vec{c} - \vec{b}$ zweier Seiten des Dreiecks ΔABC gebildte Parallelogramm hat den Flächeninhalt $|\det(\vec{x}, \vec{y})|$; damit haben wir

   $$F = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \right| = \frac{11}{2}.$$

   ad(ii) Im 3-dim reellen euklidischen Raum gilt für Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$, dass

   $$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$$

   ist und damit gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms bzw. zweimal dem Flächeninhalt des von $\vec{0}, \vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Dreiecks.

   Wir betten $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bzw. $\vec{x}$ und $\vec{y}$ durch Hinzufügen einer dritten Komponente mit Koordinate 0 in den 3-dim Raum ein. Dann erhalten wir:

$$F = \frac{1}{2}|(\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{c}-\vec{b})| = \frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} -1 & 3 & e_1 \\ 1 & 8 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |-8-3| = \frac{11}{2}.$$

ad(iii) Analog zu (ii) hätte man auch gleich das Volumen des Spats (Parallelflachs) mit Höhe 1 und dem bereffenden Parallelogramm als Grundfläche berechnen können. Für F erhält man so einhalb mal den Betrag der Determinante (des Spatprodukts) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, also $F = \frac{1}{2} \cdot |-8-3| = 5\frac{1}{2}$.