Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe A3 (Dreieck: Schwerpunkt-Koordinaten, Flächeninhalt)[1]

Sei ΔABC ein Dreieck im reellen euklidischen Raum! Die kartesischen Koordinaten der Ortsvektoren von A, B und C seien:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

(1) Wie lautet eine Parametergleichung der Seitenhalbierenden durch C ?

(2) Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt (d.h. der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) S von ΔABC ?
Hinweis: Sie dürfen den entsprechenden Satz aus der Vorlesung verwenden!

(3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt F von ΔABC !
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier verwenden, dass $F = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$ mit $\vec{u} := \vec{AB}$ und $\vec{v} := \vec{AC}$ gilt.

Lösungsskizze

(1) Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ hat den Ortsvektor
$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, die Gerade MC damit die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{m} + t(\vec{c} - \vec{m}) = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 - \frac{13}{2} \\ 1 - 4 \\ 11 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

[1] frei nach K.P.Grotemeyer: Analytische Geometrie III.3

(2) Für den Ortsvektor $\vec{s}$ von S erhalten wir unter Verwendung des entsprechenden Satzes der Vorlesung:

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\,(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}18\\9\\19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\\frac{19}{3}\end{pmatrix}.$$

Anmerkung: S erfüllt die Geradengleichung aus (1) mit $t=\frac{1}{3}$.

(3) Mit $\vec{u}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}9\\-2\\8\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-4\\11\end{pmatrix}$ erhält man

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 8 & 11\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}9 & 3\\ 8 & 11\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}9 & 3\\ -2 & -4\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22+32\\-99+24\\-36+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-75\\-30\end{pmatrix};$$

somit ist

$$F=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+75^2+30^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6625} \approx 40,697.$$