Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe A2 (Parallelogramm)

Sei $\Diamond ABCD$ ein Parallelogramm in der reellen Ebene,
d.h. (in der analytischen Geometrie) vier Punkte derart, dass die Pfeile $\vec{AB}$ und $\vec{DC}$ zum gleichen Vektor $\vec{b}$ und die Pfeile $\vec{BC}$ und $\vec{AD}$ zum gleichen Vektor $\vec{d}$ gehören und $\vec{b}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig (nicht parallel und ungleich $\vec{0}$) sind.
Zeigen Sie vektoriell: Die Diagonalen AC und BD schneiden sich!

Lösungsskizze

Sei A als Ursprung gewählt; dann sind $\vec{b}$ und $\vec{d}$ die Ortsvektoren von B bzw. D und $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ der Ortsvektor von C.
Die Gerade AC hat dann die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = s\,\vec{c} = s\,(\vec{b} + \vec{d}),$$

die Gerade BD (in der Zwei-Punkte-Form) die Darstellung

$$\vec{y} = \vec{b} + t\,(\vec{d} - \vec{b}).$$

Zu einem gemeinsamen Punkt von AC und BD existieren dann $s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$s\,(\vec{b} + \vec{d}) = \vec{b} + t\,(\vec{d} - \vec{b}),$$

also

$$(s - 1 + t)\,\vec{b} = (t - s)\,\vec{d}.$$

Die letzte Gleichung ist wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{b}$ und $\vec{d}$ genau für $s = t = \frac{1}{2}$ erfüllt. Tatsächlich[1] liegt der Punkt mit Ortsvektor $\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$ auf beiden Diagonalen.

[1] Meta-Anmerkung: Auf Beweisrichtung achten!