Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Anal.Geometrie I'

Aufgabe A1 (Geradengleichung)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$A = (1,0,0),\ B = (1,1,1),\ C = (0,-1,1),\ D = (1,-1,1)$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Geraden $g = AB$ und $h = CD$!

(b) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind!

Lösungsskizze

(a) Die Zweipunkteform für Geraden durch die Punkte A und B mit Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lautet:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Also ist hier $\quad g : \vec{x_g} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h : \vec{x_h} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(b) Die Geraden sind windschief, d.h. liegen nicht in einer Ebene; denn

(i) g und h sind nicht parallel, d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, und

(ii) g und h schneiden sich auch nicht, d.h. die Gleichung $\vec{x_g} = \vec{x_h}$ hat keine Lösung.

Anmerkung: Alternativ reicht es, zu zeigen: $\det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{d}, \vec{a} - \vec{d}) \neq 0$.