4. Übung zur Algebra und Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrer

Dozent: V.Schulze

Aufgabe 13

Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{R}^p := \{r \in \mathbb{R} | r > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen.
Man zeige:
(i) $(\mathbb{R}^p, \cdot)$ ist eine Gruppe.
(II) $(\mathbb{R}^p, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ sind isomorph. (Eigenschaften der Exponentialfunktionen oder des Logarithmus dürfen benutzt werden)

Aufgabe 14

Es sei $\mathbb{Q}^p$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.
Dann ist $(\mathbb{Q}^p, \cdot)$ eine Gruppe.
Die Abbildung $f : \mathbb{Q}^p \to \mathbb{Q}^p$ sei definiert durch $f(r) := r^2$ für alle $r \in \mathbb{Q}^p$.
Ist f ein Gruppenhomomorphismus?

Aufgabe 15

Ist f aus Aufgabe 14 ein Gruppenisomorphismus?

Aufgabe 16

Es sei $\mathbb{R}^0$ die Menge der von Null verschiedenen reellen Zahlen.
Man zeige: Die Grupen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^0, \cdot)$ sind nicht isomorph.
Hinweis: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^0$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt stets $f(r) = f(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}) = f(\frac{r}{2}) \cdot f(\frac{r}{2})$.