

1. Übung zur Algebra und Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrer

Dozent: V.Schulze

Aufgabe 1

Sei die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gegeben und auf der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen eine Relation \sim definiert durch

$$a \sim b :\Leftrightarrow n|(a - b) \text{ (d.h. } n \text{ ist Teiler von } a-b\text{).}$$

Man schreibt für $a \sim b$ auch $a \equiv b \pmod{n}$.

Man zeige, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2

(i) Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $[a]$ die von a erzeugte Äquivalenzklasse bez. \sim aus Aufgabe 1.

Welche Elemente enthält $[a]$?

(ii) Man gebe alle Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation \sim an.

Aufgabe 3

Auf der Menge $H = \{e, a\}$ sei eine Verknüpfung \circ definiert durch

$$e \circ e = e, e \circ a = a, a \circ e = e, a \circ a = a.$$

(i) Man zeige, dass (H, \circ) eine Halbgruppe ist.

(ii) Ist (H, \circ) eine Gruppe?

Aufgabe 4

Betrachte die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

und

$$\phi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$$

Berechne $\phi \circ \pi, \pi \circ \phi, \pi^{-1}$.