1.Teil der Modulprüfung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' am 22.11.2017

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Punkte für Aufg.1

Bearbeiten Sie bitte folgende Aufgabe!
Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Für die vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte; die erzielte Punktezahl wird auf den zweiten Teil der Modulprüfung angerechnet.

Aufgabe 1 (parallele und orthogonale Geraden; lineare Unabhängigkeit)

(a) Gegeben seien die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$ (in kartesischen Koordinaten):

$$A = (2|1,5); \quad B = (1,5|2) \quad C = (1|1) \quad \text{und} \quad D = (1|-1,5).$$

Durch A und B sei die Gerade $g_1 := AB$ bestimmt.

(i) Geben Sie die Punkte der Geraden g_1 an!

(ii) Ist C ein Punkt von g_1 ? (Punktprobe!)

(iii) Bestimmen Sie eine zu g_1 parallele Gerade g_2 mit $D \in g_2$.

(iv) Bestimmen Sie eine zu g_1 (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts) orthogonale Gerade g_3, die durch den Punkt C geht!

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq -16$. Prüfen Sie die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ folgender drei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ auf lineare Unabhängigkeit:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweis: Beachten Sie: $(\lambda + 16)\mu = 0 \Longrightarrow [\mu = 0 \vee \lambda + 16 = 0]$.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Zweipunkte-Form der Gleichung einer Geraden durch die Punkte mit Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lautet

$$g : \vec{x} = \vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a}) \quad (\text{mit} \quad k \in \mathbb{R}).$$

Dementsprechend gilt:

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + k \Big[\begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Big] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

(ii) C ist genau dann ein Punkt von g_1, wenn ein $k \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

wenn also das folgende Lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ lösbar ist:

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & 2 & -0,5x \\ 1 & = & 1,5 & +0,5x \end{array} .$$

Dieses Gleichungssystem ist aber nicht lösbar (eine Lösung wäre positiv gemäß der ersten und negativ nach der zweiten Zeile). Es folgt:

$$C \notin g_1.$$

(iii) Eine Gerade g_2 ist genau dann eine zu g_1 parallele Gerade durch D, wenn ihre Gleichung ein nicht-triviales Vielfache eines Richtungsvektors von g_1 (z.B. von $0,5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$) als Richtungsvektor hat und den Ortsvektor von D (z.B.als Stützvektor) enthält. Damit ergibt sich z.B.

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ mit} \quad l \in \mathbb{R}).$$

(iv) Eine Gerade g_3 ist genau dann orthogonal zu g_1, wenn sie einen Richtungsvektor hat, der zu einem (und damit jedem) Richtungsvektor von g_1 orthogonal ist. Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \in g_3$ ist

$$g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 + m) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } m \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Menge der Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ aus $\mathbb{R}^3$ ist (laut Definition) genau dann linear unabhängig, wenn (für $x, y, z \in \mathbb{R}$) gilt:

$$(*) \quad \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \left[x = y = z = 0\right].$$

Die Gleichung auf der linken Seite von $(*)$ ist äquivalent zu folgendem reellen linearen Gleichungssystem.

$$(**) \left\{ \begin{array}{rrrcl} x+ & & 2z & = & 0 \\ 2x+ & \frac{1}{2}y & & = & 0 \\ & 2y+ & az & = & 0 \end{array} \right. ,$$

also $x = -2z$ und $y = -4x = 8z$ sowie $(16 + a)z = 0$
(d.h. $16 + a = 0 \vee z = 0$). Das System $(**)$ ist daher genau dann nur trivial lösbar, wenn (wie hier vorausgesetzt) $a \neq -16$ ist.
Folglich ist die Menge der Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig.

Anmerkung: Die Prüfung auf lineare Unabhängigkeit ist mittels Determinante schneller möglich; aber die entsprechende Theorie wurde in der Vorlesung noch nicht behandelt.