Modulprüfung 2.Teil zum Lehrerweiterbildungskurs 'Lineare Algebra /Analytische Geometrie I' am 17.1.2018

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1 aus Teil 1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	Note
	wie bei Teil 1	X					
Punkte							

Bearbeiten Sie bitte zwei der drei folgenden Aufgaben! Falls Sie alle drei Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche zwei Aufgaben gewertet werden sollen!** Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Das Resultat der 1.Teilklausur (Aufgabe 1) wird übernommen.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 2 (Unterraum, Kern, Basis, lineare Fortsetzung, Matrix-Darstellung)

(i) Seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung! Zeigen Sie (ohne sich auf den entsprechenden Satz der Vorlesung und seinen Beweis zu beziehen):

$$\mathrm{Kern} f \text{ ist ein Unterraum von } V.$$

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier das Unterraum-Kriterium anwenden!

(ii) Seien $\ell = m\mathbb{R}$ (mit $m \neq 0$) eine Nullpunktgerade im $\mathbb{R}-$Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$. Gibt es eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit Kern $f = \ell$? Begründen Sie Ihre Behauptung!
Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier den Basisergänzungssatz und den Satz über die lineare Fortsetzung anwenden.

(iii) Seien nun speziell $m_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\ell_1 = m_1\mathbb{R}$ und $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit Kern $f_1 = \ell_1$ sowie $f_1((0, 2)) = (2, 0)$. Bestimmen Sie $M_B^B(f_1)$ für die kanonische Basis $B = (e_1, e_2)$!

(iv) Geben Sie eine lineare Gleichung an, die ℓ_1 (aus Aufgabenteil (iii)) als Lösungsmenge besitzt.

Aufgabe 3 (Matrix-Darstellung, Rang, Rang einer linearen Abbildung)
Seien V ein $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Basis $(b_1, \ldots, b_4)$ und W ein $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Basis (c_1, c_2, c_3, c_4), ferner $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ mit

$$\begin{aligned} f(b_1) &= c_1 + c_2 \\ f(b_2) &= c_1 + c_3 \\ f(b_3) &= c_2 + c_4 \\ f(b_4) &= c_1 + c_3\alpha. \end{aligned}$$

1. Geben Sie die Matrix $M := M_C^B(f)$ von f bzgl. des Basispaares (B, C) an!
   Anmerkung: Falls Sie äußerst unsicher sind, ob die von Ihnen angegebene Matrix korrekt ist, können Sie bei den nachfolgenden Aufgabenteilen statt M auch die folgende Matrix M' (mit zugehöriger linearer Abbildung f') benutzen:
$$M' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ohne Begründung!), und geben Sie damit oder direkt $f(v_0)$ für $v_0 := b_1 + b_2 - b_3 - b_4$ an!

3. Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(M)$ und $\mathrm{Rang}(f)$ in Abhängigkeit von α .

4. Für welche Werte α ist f ein Isomorphismus?

Aufgabe 4 (Lineares Gleichungssystem, elementare Zeilenumformungen)
siehe nächste Seite

Aufgabe 4 (Lineares Gleichungssystem, elementare Zeilenumformungen)

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$(*) \left\{ \begin{array}{rrrrcr} \xi_1+ & 2\xi_2+ & \xi_3+ & \xi_4 & = & 1 \\ \xi_1+ & \xi_2+ & 2\xi_3+ & \xi_4 & = & 1 \\ \xi_1+ & 2\xi_2+ & \xi_3+ & (\alpha+1)\xi_4 & = & \alpha+1 \end{array} \right.$$

(i) Geben Sie (ohne Begründung) die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix A_{erw} von $(*)$ an!

(Zu (ii) bis (v) s.u.)

(ii) Führen Sie A_{erw} durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $\widehat{A_{\text{erw}}}$ in Zeilenstufenform über.

Lösungshinweis zu (iii)-(v): Sie dürfen unbewiesen verwenden, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen weder der Rang der Matrix noch der Lösungsraum des zugehörigen Gleichungssystems ändert.

(iii) Untersuchen Sie die Lösbarkeit von $(*)$ mittels des in der Vorlesung behandelten Lösbarkeitskriteriums!

(iii) Bestimmen Sie im Fall $\alpha \neq 0$ den Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems $(**)$!

(iv) Bestimmen Sie (ebenfalls im Fall $\alpha \neq 0$) eine Partikulärlösung von $(*)$.

(v) Geben Sie (ebenfalls im Fall $\alpha \neq 0$) den Lösungsraum L von $(*)$ an!

Lösungsskizzen:

Zu Aufgabe 2

(i) Sei $U := \mathrm{Kern} f$. Laut Definition ist $U \subseteq V$ und wegen $f(0) = 0$ auch $U \neq \emptyset$. Um das Unterraumkriterium (Satz 6.5 der Vorlesung) anwenden zu können, zeigen wir noch die Abgeschlossenheit von U bzgl. Addition und S-Multiplikation: Seien $v, w \in U$ und $\lambda \in K$! Dann folgt aus der Linearität von f und aus $f(u) = 0 = f(w)$, dass

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0 \quad \text{sowie} \quad f(v\lambda) = f(v)\lambda = 0,$$

also $v + w \in U$ und $v\lambda \in U$. Das Unterraum-Kriterium liefert dann die Behauptung.

(ii) Es existiert eine solche Abbildung:

Nach dem Basisergänzungssatz kann man (m) zu einer Basis $B = (m, v)$ ergänzen . Nach dem Fortsetzungssatz existiert dann eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(m) = 0$ und $f(v) \neq 0$. Dabei ist dann $m \in \mathrm{Kern} f$, wegen der Unterraumeigenschaft $\ell \subseteq$Kern f sowie aus Dimensionsgründen $\ell =$Kern f.

Alternativ könnte man eine Basis B mit $b_1 = m_1$ als einen der Vektoren (Basisergänzungsssatz) auswählen und dann mit Koordinatenvektoren bzgl. B und Multiplikation mit einer Matrix, z.B. der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

argumentierern.

(iii) In den Spalten von $M_B^B(f_1)$ stehen die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren des Urbildraums; wegen $m_1 \in \mathrm{Kern} f_1$ und $m_1 = e_1$ folgt $f_1(e_1) = (0, 0)$. Wegen der Linearität von f_1 ergibt sich aus $f_1((0, 2)) = (2, 0)$ dann $f_1((0, 1)) = (1, 0)$. Es folgt

$$M_B^B(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) Der Vektor $e_2 := (0, 1)$ ist orthogonal zu m_1 (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts). Also sind m_1 und damit $m_1\lambda$ (für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$) Elemente des Lösungsraums der linearen Gleichung $e_2 \cdot x = 0$, also von

$$(*) \qquad \xi_2 = 0.$$

Aus Dimensionsgründen ist dann der Lösungsraum von $(*)$ gleich l_1.

Alternativ kann man auch so argumentieren: ℓ_1 entpricht der ξ_1-Achse und besteht daher genau aus den Punkten mit der Gleichung $\xi_2 = 0$.

Zu Aufgabe 3

1. In der $j-$ten Spalte von $M = M_C^B(f)$ stehen die Koordinaten von $f(b_j)$ bzgl. der Basis C. Damit erhält man
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\alpha \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Es folgt
$$f(v_0) = c_1 + (1-\alpha)c_3 - c_4.$$
(*Alternativ direkt:*
$f(v_0) = f(b_1 + b_2 - b_3 - b_4) = f(b_1) + f(b_2) - f(b_3) - f(b_4) =$
$c_1 + c_2 + c_1 + c_3 - c_2 - c_4 - c_1 - c_3\alpha = c_1 + (1-\alpha)c_3 - c_4.$)
Alternativ mit der Ersatzmatrix:
$$M' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3-\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$
und $f'(v_0) = c_2 + (3-\alpha)c_3 + c_4$.

3. Durch Entwicklung von $\det M$ nach der 4.Zeile erhält man:
$$\det M = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 1.$$

Dies zeigt, dass M und f für $\alpha \neq 1$ vollen Rang (also Rang 4) haben.

Ist $\alpha = 1$, so Rang $M \leq 3$; die 3 Stufen von M zeigen Rang $M \geq 3$, insgesamt also: Rang $f =$ Rang $M = 3$.

Alternative Lösungsmöglichkeit:

Durch (den Rang einer Matrix nicht verändernde) elementare Zeilenumformungen erhält man aus M z.B. durch Subtraktion der Zeile 1 von Zeile 2 die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, durch Addition der neuen Zeile 2 zu Zeile 3 dann $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und durch Subtraktion der vorletzten von der letzten Zeile $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$.

Aus der Zeilenstufenform erkennt man nun: Rang f = Rang $M = 3$, falls $\alpha = 1$ gilt, und Rang f =Rang $M = 4$ für $\alpha \neq 1$.

Alternativ mit der Ersatzmatrix:

Durch Entwicklung von $\det(M')$ nach der 4.Zeile erhält man:

$$\det M' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha + 1.$$

Dies zeigt, dass M' und f' für $\alpha \neq 1$ vollen Rang (also Rang 4) haben.

Ist $\alpha = 1$, so Rang $M \leq 3$; wegen dreier unabhängiger Zeilen von M' ist Rang $M' \geq 3$, insgesamt also: Rang $f' =$ Rang $M' = 3$.

Alternativ mit der Ersatzmatrix mittels elementarer Zeilenumformungen, z.B. durch

$$\begin{aligned} \overline{z_3} &= z_3 - z_2 - z_4 \\ \overline{z_1} &= z_1 - z_4 \end{aligned}$$

und Umsortieren:

$$|\det(M')| = |\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}| = |\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix}| = |\alpha - 1|.$$

Es folgt, dass M' und f' für $\alpha \neq 1$ vollen Rang (also Rang 4) und für $\alpha = 1$ den Rang 3 haben.

4. Im Fall $\alpha \neq 1$ ist $\operatorname{Rang} M = 4$, also $\dim f(V) = 4 = \dim W$, d.h. ist f surjektiv und damit bijektiv. Im Fall $\alpha = 1$ ist f kein Isomorphismus.

Zu Aufgabe 4

(i) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & (\alpha+1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & (\alpha+1) & | & (\alpha+1) \end{pmatrix}.$$

(ii) Durch Subtraktion der Zeile 1 von den Zeilen 2 und 3 erhält man:

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & (\alpha+1) & | & (\alpha+1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \widehat{A_{\text{erw}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & |\alpha \end{pmatrix}$$

(iii) Im Fall $\alpha \neq 0$ ist $\operatorname{Rang} A = 3 = \operatorname{Rang} A_{\text{erw}}$ und damit $(*)$ nach dem Lösbarkeitskriterium lösbar. Im Fall $\alpha = 0$ ist $\operatorname{Rang} A = 2 = \operatorname{Rang} A_{\text{erw}}$ und damit $(*)$ ebenfalls lösbar.

(iv) Ist $\alpha \neq 0$, so folgt aus der zweiten Zeile der Matrix $\widehat{A_{\text{erw}}}$ in Stufenform für eine Lösung des homogenene Systems $\xi_2 = \xi_3$ und aus der dritten Zeile $\xi_4 = 0$. Einsetzen in die erste Zeile liefert $\xi_1 + 3\xi_2 = 0$ und damit (nach der Probe wegen der Beweisrichtung)

$$L_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

(iv) Wieder aus der Matrix in Zeilenstufenform erhält man $\xi_2 = \xi_3$ und diesmal $\xi_4 = 1$. Einsetzen in die 1.Zeile liefert durch Setzung $\xi_2 = 0$ (und Probe !) dann als eine Partikulärlösung:

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Partikulärlösung erhält man evt. auch durch genaues Hinsehen.

(v) Aus (iii) und (iv) ergibt sich mittels des Satzes über den Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems:

$$L = p + L_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$