Ergebnisse zur
Modulprüfung zur
Elementaren Algebra/Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrer an der FU

Dozent: V.Schulze Datum: 18.1.2018 Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Name	Vorname	Unterschrift	Matr.Nr.

Aufgabe	1	2	3	4		Punktsumme	Note
Punkte							

Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben,
pro Aufgabe also maximal 10 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Matr.Nr. - Note
4068696 - 3,7
090366 - 4,0
5123257 - 1,0
5123269 - 4,0
5123282 - 1,3
3064430 - 4,0
180679 - 2,7
2495489 - 1,3
L $\in$ M - 2,7
3010687 - 1,3
1071 - 2,3
Irr - 2,7
08-15 - 3,7
??? - 1,7
mn12161 - 1,7
524265 - 3,7
205615 - 3,0

5129852 - 3,0
KKE - 5,0
5128751 - 2,3
5129089 - 1,3
4016640 - 5,0
315324 - 3,3
3309033 - 4,0

Aufgabe 1

Die Permutation π aus der symmetrischen Gruppe S_5 sei definiert durch $\pi := (1, 3, 5)$.
(i) Man zeige: $U := \{id, \pi, \pi^2\}$ ist die kleinste Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_5, die π enthält.
Man bestimme die Elemente der Nebenklasse $(1, 2) \circ U$.
(ii) Man zeige: $\pi \circ (1, 2) \notin (1, 2) \circ U$.
Ist U Normalteiler in S_5 ?

Aufgabe 2

Der Unterring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ von $\mathbb{R}$ sei definiert durch $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] := \{a+b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Sei $f : \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $f(a + b\sqrt{5}) := a$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.
(i) Man zeige: f ist relationstreu bezüglich + .
Also ist f ein Gruppenhomomorphismus bezüglich + .
Ist f ein Ringhomomorphismus ?
(ii) Ist f surjektiv ?
Man bestimme den Kern des Gruppenhomomorphismus f .

Aufgabe 3

(i) Man zeige: $x^3 + x + 1 \equiv 0 (mod 5)$ ist nicht lösbar.
Ist $x^3 + x + 1 \equiv 0 (mod 135)$ lösbar?
Ist $x^3 + x + 1 = 5y^2$ in $\mathbb{Z}$ lösbar?
(ii) Man zeige: $5104x \equiv 1 (mod 10209)$ ist lösbar.
Man bestimme eine Lösung a der Kongruenz mit geradem a .
Man bestimme eine Lösung a der Kongruenz mit ungeradem a .

Aufgabe 4

(i) Man zeige: $x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel .
Ist $x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_2[x]$ irreduzibel ?
(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
Man gebe eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ an.
Ist $\{1, \alpha, \alpha^3\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$?