Aufgabe Z1 (Vektorrechnung: Gerade, Schnittpunkt, lineare Abbildung, affine Geometrie)
Seien $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$ sowie $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ Ortsvektoren von paarweise verschiedenen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 von $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^2)$ derart, dass die Geraden $g := P_1P_2$ und $h := P_3P_4$ nicht parallel sind. Sei ferner f eine bijektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf sich, also ein Automorphismus von $\mathbb{R}^2$.

1. Geben Sie die Ortsvektoren der Punkte von g und die von h an!
2. Zeigen Sie, dass sich g und h schneiden!
   Lösungshinweis: $\vec{p}_3 - \vec{p}_1 \in \mathbb{R}^2 = \{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)k + (\vec{p}_4 - \vec{p}_3)\,l \mid k, l \in \mathbb{R}\}$.
   Hinweis: Die Tatsache, dass sich in $\mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Geraden genau dann schneiden, wenn sie nicht parallel sind, darf hier nicht unbewiesen verwandt werden.
3. Begründen Sie, warum sich auch $f(g)$ und $f(h)$ schneiden und warum der Schnittpunkt $g \cap h$ von g und h auf den Schnittpunkt $f(g) \cap f(h)$ von $f(g)$ und $f(h)$ abgebildet wird.
4. Unter welcher Bedingung an P_4 gilt $g \perp h$ im Falle $P_1 = (1,0), P_2 = (1,1)$ und $P_3 = (0,0)$?

Aufgabe Z2 (Lineare Unabhängigkeit)

1. Geben Sie zwei verschiedene Teilmengen der Menge der Vektoren
   $$\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1), (0,0,1)\}$$
   an, die jeweils eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden (mit Begründung)!
   Hinweis: In der Vorlesung behandelte Sätze dürfen hier unbewiesen benutzt werden.
2. Sind $X - 1$ und $X^2 - X$ aus $\mathbb{R}[X]$ linear unabhängig (mit Begründung)?

Aufgabe Z3 (Lineare Abbildung, Matrix, lineares Gleichungssystem)

Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem

$$(*_t) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} \xi_1 + & \xi_2 + & \xi_3 & = & 3 \\ \xi_1 + & 2\xi_2 + & 4\xi_3 & = & 7 \\ 2\xi_1 + & 4\xi_2 + & 8\xi_3 & = & t \end{array} \right. \quad !$$

mit $t \in \mathbb{R}$ fest.

1. Geben Sie (ohne Begründung) die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix $A_{t-\mathrm{erw}}$ von $(*)$ an!
2. Für welche Werte t ist $(*_t)$ lösbar?
3. Geben Sie die zu $(*_t)$ gehörende Abbildung f_A genauer an (Urbild, Wertebereich, Zuordnungsvorschrift)!
4. Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f_A)$!
5. Lösen Sie das LGS $(*_t)$ im Falle $t = 14$!
6. Sei nun $t = 14$. Liegt der Vektor $v = \left(3/7/14\right)^T$ in $\mathrm{Bild}(f_A)$?

Lösungsskizzen

zu Aufgabe Z1

1. Mit der Zweipunkteformel ergibt sich:

$$g = \vec{p}_1 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\mathbb{R} \quad \text{und} \quad h = \vec{p}_3 + (\vec{p}_4 - \vec{p}_3)\mathbb{R}.$$

2. Laut Definition gilt

$$g \nparallel h :\Leftrightarrow (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\mathbb{R} \neq (\vec{p}_4 - \vec{p}_3)\mathbb{R}.$$

   Daraus folgt hier, dass $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ und $\vec{p}_4 - \vec{p}_3$ linear unabhängig sind. Aus Dimensionsgründen gilt daher: $\mathbb{R}^2 = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\mathbb{R} + (\vec{p}_4 - \vec{p}_3)\mathbb{R}$. Es existieren daher Elemente $k.l \in \mathbb{R}$ mit $\vec{p}_3 - \vec{p}_1 = (p_2 - \vec{p}_1)k + (\vec{p}_4 - \vec{p}_3)l$. (S. Lösungshinweis!) Also: $\vec{p}_1 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)k = \vec{p}_3 + (\vec{p}_4 - \vec{p}_3)(-l) \in g \cap h = S$. Aus $|g \cap h| \leq 1$ ergibt sich die Behauptung.

3. Da f linear ist, gilt

$$f(g) = f(\vec{p}_1) + f(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(h) = f(\vec{p}_3) + f(\vec{p}_4 - \vec{p}_3)\mathbb{R}.$$

   Da f als bijektiv vorausgesetzt ist, sind $f(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ und $f(\vec{p}_4 - \vec{p}_3)$ als Bilder von linear unabhängigen Elementen linear unabhängig und liegen nicht im Kern von f, sodass $f(g)$ und $f(h)$ wieder verschiedene nicht parallele affine Unterräume der Dimension 1 und damit sich schneidende Geraden sind. Es folgt $f(S) = f(g \cap h) \in f(g) \cap f(h)$ und damit $f(S) = f(g) \cap f(h)$.

4. Laut Definition gilt

$$g \perp h \Leftrightarrow (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \perp (\vec{p}_4 - \vec{p}_3) \Leftrightarrow (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)(\vec{p}_4 - \vec{p}_3) = 0.$$

   Im vorliegenden Fall ist $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ gleich $(1,1) - (1,0) = (0,1)$; notwendig und hinreichend für $g \perp h$ ist damit $(\vec{p}_4 - \vec{p}_3) \in (1,0)\mathbb{R}$, also $\vec{p}_4 \in \vec{p}_3 + (1,0)\mathbb{R} = (1,0)\mathbb{R}$.

zu Aufgabe Z2

1. Jede Basis von $\mathbb{R}^3$ besteht aus genau 3 Vektoren. Aus mehreren Möglichkeiten behandeln wir hier (wie verlangt) zwei Fälle:

   (i) Behauptung: $\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Zu zeigen bleibt die lineare Unabhängigkeit der ausgewählten Vektoren. Aus $(1,1,0)\lambda + (1,0,1)\mu + (0,1,1)\nu = 0$ folgt

$$\begin{cases} \lambda + & \mu & & = & 0 \\ \lambda + & & \nu & = & 0 \\ & \mu + & \nu & = & 0 \end{cases}$$

   und daraus $\mu = -\lambda = \nu$, somit $2\mu = 0$, folglich $\mu = \nu = 0 = \lambda$.

(ii) Behauptung: $\{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Aus $(1,1,0)\lambda+(1,0,1)\mu+(1,1,1)\nu=0$ folgt

$$\begin{cases} \lambda+ & \mu+ & \nu= & 0 \\ \lambda+ & & \nu= & 0 \\ & \mu+ & \nu= & 0 \end{cases}$$

und daraus $\mu=-\nu=\lambda$, somit $\mu=0$, folglich $\mu=\nu=\lambda=0$.

2. Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit der gegebenen Polynome: Gelte

$$\lambda(X-1)+\mu(X^2-X)=0.$$

Umordnung nach Potenzen von X führt zu

$$-\lambda+(\lambda-\mu)X+\mu X^2=0.$$

Der Vergleich der Koeffizienten von X^i zwischen linker Seite der Gleichung und dem Nullpolynom auf der rechten Seite liefert $\lambda=\mu=0$, was zu zeigen war.

zu Aufgabe Z3

1. Es gilt:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\2&4&8\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{t-\mathrm{erw}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&2&4&7\\2&4&8&t\end{array}\right).$$

2. Da die 3.Zeile von A gleich dem 2-fachen der 2. Zeile ist, folgt die Unlösbarkeit von $(*_t)$ im Falle $t\neq 14$. Die Lösbarkeit im Falle $t=14$ ergibt sich dann mit dem Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme aus Rang $A=2=$RangA_{14-erw}.

*Alternative Lösung:*Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$A_{t-\mathrm{erw}} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&2&4&7\\0&0&0&t-14\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}\underline{1}&1&1&3\\0&|\underline{1}&\underline{3}&4\\0&0&0|&t-14\end{array}\right).$$

Damit sieht man: Rang$A=2$ und Rang$A_{t-erw}=\begin{cases}3 & \text{falls} \quad t\neq 14\\ 2 & \text{falls} \quad t=14.\end{cases}$

Aus dem Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme folgt: $(*_t)$ ist genau dann lösbar, wenn $t=14$ ist.

3. Zu $(*_{14})$ gehört die lineare Abbildung

$f_A:\mathbb{R}^{(3,1)}\to\mathbb{R}^{(3,1)}$ mit der Zuordnungsvorschrift $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}\mapsto A\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}.$

4. Es gilt (unter Verwendung von 2.)

$$\begin{aligned}
\text{Kern } f_A &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{(3,1)} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,1)} \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \;\wedge\; \xi_2 + 3\xi_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,1)} \;\middle|\; \xi_2 = -3\xi_3 \;\wedge\; \xi_1 = 2\xi_3 \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}
\end{aligned}$$

5. Für den Lösunsraum L von $(*_{14})$ gilt $L = p + L_0$ mit $L_0 = \text{Kern } f_A$ und Partikulärlösung p des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzt man z.B. $\xi_3 = 0$, so folgt $\xi_2 = 4$ und $\xi_1 = -1$.
Tatsächlich ist $p = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $(*_{14})$ (Probe!).

6. Da das lineare Gleichungssystem $(*_{14})$ lösbar ist (s.o.) und f_A die zugehörige lineare Abbildung, liegt $v = (3, 7, 14)^T$ (die rechte Seite von $(*_{14})$) im Bild von f_A.