Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe F7 (LGS)

Im $\mathbb{R}^2$ seien vier Geraden der Reihe nach durch die Gleichungen

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & -3 & = 0 \\ 5x_1 & -3x_2 & -2 & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -4\alpha & = 0 \end{array}$$

(mit $\alpha \in \mathbb{R}$) gegeben. Gibt es einen Wert α, für den die entsprechenden 4 Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen?

Lösungsskizze:

1.Möglichkeit: Die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ des zugehörigen LGS hat Rang 2, da die zweite Spalte kein Vielfaches der ersten Spalte ist.
Einen gemeinsamen Schnittpunkt gibt es daher genau dann, wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4\alpha \end{array}\right)$$

ebenfalls Rang 2 hat.
Die 3.Spalte von $(A|b)$ ist die Summe der erten beiden Spalten, und damit gilt

$$\text{Rang } (A|b) = \text{ Rang } A,$$

wenn $2 + 3 = 4\alpha$, also $\alpha = \frac{5}{4}$ ist.
2.Möglichkeit: Elementare Zeilenumformungen:

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -13 & -13 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -6+4\alpha \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5+4\alpha \end{array}\right).$$

Da bei elementaren Zeilenumformungen der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems unverändert bleibt, zeigt die letzte Matrix, dass eine Lösung genau dann existiert, wenn $\alpha = \frac{5}{4}$ ist.
3.Möglichkeit:
Durch Raten sieht man, dass der gemeinsame Punkt der drei ersten Geraden $(1, 1)$ ist. Damit die 4.Gerade durch diesen Punkt geht, ist erforderlich, dass $5 - 4\alpha = 0$ gilt. $\square$