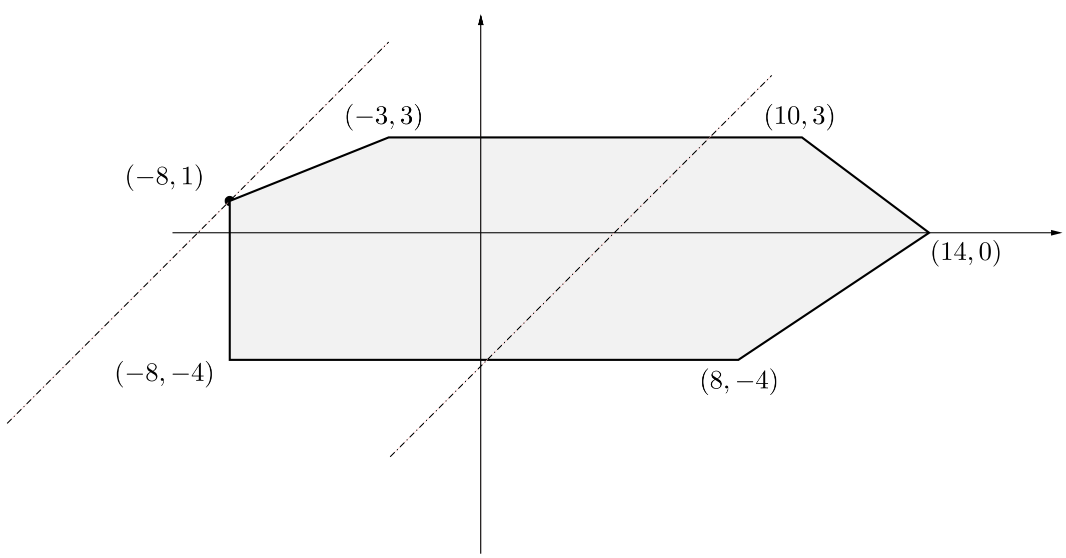
Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe F6 (Lineare Optimierung)
Gegeben ist folgendes reelles lineares Ungleichungssystem:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{lrrcr} (1) & x & & \geq & -8 \\ (2) & & y & \geq & -4 \\ (3) & & y & \leq & 3 \\ (4) & 3x & +4y & \leq & 42 \\ (5) & 2x & -3y & \leq & 28 \\ (6) & 2x & -5y & \geq & -21 \end{array} \right.$$

Optimieren Sie unter diesen Bedingungen die Zielfunktion $Q(x, y) = y - x$!

Lösungsskizze:
Durch Schnitt der zu den einzelnen Ungleichungen gehörenden Halbebenen erhält man ein Gebiet, das in der folgenden Graphik veranschaulicht ist.



Auch die (exakten) Koordinaten der Schnittpunkte der Randgeraden sind eingetragen. Den optimalen Wert der Zielfunktion erhält man durch Verschieben einer Geraden mit der Gleichung $y - x = c (= Q(x, y))$ (mit $c \in \mathbb{R}$) in Richtung größerer y-Achsen-Abschnitte c, also in diesem Fall in Richtung kleinerer x-Werte.
Man erhält einen eindeutigen optimalen Punkt durch Schnitt der Geraden, die zu den Ungleichungen (1) und (6) gehören, also den Punkt $(-8, 1)$. Die Zielfunktion hat in diesem Punkt den Wert $1 - (-8) = 9$.