

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe F5 (Lineares Gleichungssystem)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_4 = 1 \\ 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 2\alpha + 1 \\ 2\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = 4 \end{cases}$$

über \mathbb{R} (mit $\alpha \in \mathbb{R}$).

- (i) Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix A von $(*)$ und welchen Rang die erweiterte Koeffizientenmatrix A_{erw} ? (Antwort jeweils bitte mit ganz kurzer Begründung)?
- (ii) Begründen Sie (unter Verwendung von Teil (i) und mit Hilfe eines Satzes) die Lösbarkeit von $(*)$!
- (iii) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $(*)$?
Anmerkung: Sie dürfen hier die entsprechende Dimensionsformel verwenden.
- (iv) Bestimmen Sie den Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems, und bestimmen Sie den Lösungsraum L von $(*)$!
- (v) Wie lässt sich L geometrisch interpretieren?

Lösungsskizze

- (i) Die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Koeffizientenmatrix von (*) sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2\alpha + 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Da die ersten drei Spalten von A linear unabhängig sind (dies sieht man z.B. durch elementare Zeilenumformungen; vgl. mit der Matrix in (iv) !), folgt $\text{rg } A = 3$.

Der Rang der erweiterten Matrix ist ebenfalls 3, da die Spalten der Matrix in \mathbb{R}^3 liegen, also höchstens drei von ihnen linear unabhängig sein können.

- (ii) Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\text{rg } A = \text{rg } A_{\text{erw}}.$$

Nach (i) ist dies für (*) der Fall.

- (iii) Im Falle der Lösbarkeit eines Linearen Gleichungssystems gilt

$$\dim_K L = \dim_K L_0 = n - \text{rg } A$$

(wobei A die Koeffizientenmatrix und n die Anzahl der Variablen bezeichnet). Im vorliegenden Fall ist $\text{rg } A = 3$ und $n = 4$, womit sich $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$ ergibt.

- (iv) Durch elementare Zeilenumformung erhält man aus

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2\alpha + 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \quad \text{z.B.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2\alpha + 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

So erhält man das Gleichungssystem (mit dem gleichen Lösungsraum):

$$(*)' \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_4 = 1 \\ 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 2\alpha + 1 \\ 2\xi_3 + 2\xi_4 = 2 \end{cases}.$$

Setzt man im zugehörigen homogenen System z.B. $\xi_2 = 0$ (und damit laut erster Zeile $\xi_1 = \xi_4$ und laut zweiter Zeile $\xi_3 = -\xi_4$), so sieht man, dass dessen 1-dim Lösungsraum gleich $L_0 = (1, 0, -1, 1)\mathbb{R}$ ist, was eine wegen der Beweisrichtung nötige Probe (insbesondere bei der 3. Zeile) bestätigt.

Setzt man ferner in (*)' z.B. $\xi_4 = 0$, so erhält man aus Zeile drei $\xi_3 = 1$ und als eine Partikulärlösung von (*) dann $x_p = (1 - \alpha, \alpha, 1, 0)$. Insgesamt ergibt sich:

$$L = (1 - \alpha, \alpha, 1, 0) + (1, 0, -1, 1)\mathbb{R}.$$

- (v) L ist eine Gerade im 4-dim reellen affinen Raum $\text{AG}(\mathbb{R}^4)$.