

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe F4 (Lineares Gleichungssystem)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad \begin{cases} \xi_1 & +2\xi_3 & = & 1 \\ 3\xi_1 & +2\xi_2 & +\alpha\xi_3 & = & 5 \\ & \xi_2 & + \xi_3 & = & 1 \end{cases}$$

über \mathbb{R} .

Geben Sie den Lösungsraum L von $(*)$ für folgende Fälle an:

(a) $\alpha = 6$

(b) $\alpha = 8$

Lösungsskizze:

Die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ ist $A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \alpha & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$.

Durch elementare Zeilenumformungen erhält man nacheinander

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{und} \quad A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\alpha}{2} + 3 & 0 \end{array} \right).$$

- (a) Da elementare Zeilenumformungen den Lösungsraum nicht ändern, erhält man im Fall $\alpha = 6$, dass der Lösungsraum L_1 von $(*)$ gleich dem des LGS's

$$(*_1) \quad \begin{cases} \xi_1 & +2\xi_3 & = & 1 \\ & 2\xi_2 & = & 2 \\ & & \xi_3 & = & 0 \end{cases}$$

ist, woraus $L_1 = \{(1, 1, 0)\}$ folgt.

- (b) Im Fall $\alpha = 8$ sind die Lösungen von $(*)$ genau die Lösungen von

$$(*_2) \quad \begin{cases} \xi_1 & +2\xi_3 & = & 1 \\ & \xi_2 & + \xi_3 & = & 1 \end{cases}.$$

Setzt man nun $\xi_3 = 0$, so sieht man, dass z.B. $x_p = (1, 1, 0)$ eine Lösung von $(*_2)$ und damit von $(*)$ ist.

Der Lösungsraum L_{20} des zu (*) gehörenden homogenen Systems ist gleich dem Lösungsraum des zu (*₂) gehörenden homogenen Systems, also von

$$(*'_2) \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_3 = 0 \\ \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} .$$

Es folgt $L_{20} = \{(-2\xi_3, -\xi_3, \xi_3) \mid \xi_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-2, -1, 1)\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = (-2, -1, 1)\mathbb{R}$.

Der Lösungsraum L_2 von (*₂) und damit von (*) ist nach einem Satz gleich $x_P + L_{20}$, also

$$L_2 = (1, 1, 0) + (-2, -1, 1)\mathbb{R}.$$