Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe F3 (LGS, Orthogonalität, affiner Unterraum)

(i) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$!

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & \xi_3 & & & = & 0 \\ \xi_1 & + & \xi_2 & + & 2\xi_3 & + & \xi_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

(ii) Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ (genauer $\mathbb{R}^{(4,1)}$) sei W der affine Unterraum (die Unterebene) durch die Punkte

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Orthogonalraum $W^\perp$ von W durch den Punkt p_3 !

Lösungsskizze

(i) Die Koeffizientenmatrix des linearen homogenen Gleichungssystems $(*)$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Umformung (2.Zeile minus 1.Zeile) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Gleichungssystem (mit dem gleichen Lösungsraum wie $(*)$) lautet

$$(**) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & \xi_3 & & & = & 0 \\ & - & \xi_2 & + & \xi_3 & + & \xi_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Wir sehen nun, dass wir die Variablen ξ_3 und ξ_4 wählen können und zwar aus Dimensionsgründen so, dass wir zwei $(= 4 - 2)$ linear unabhängige Lösungen erhalten; z.B. sei:

$$\begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Man kommt damit zu den Gleichungssystemen

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 1 & & & = & 0 \\ & - & \xi_2 & + & 1 & + & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

und

$$\begin{cases} \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 0 & & & = & 0 \\ & - & \xi_2 & + & 0 & + & 1 & = & 0 \end{cases},$$

die zu den folgenden Lösungen führen:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum des homogenen Systems $(**)$ und damit von $(*)$ ist ein Unterraum U_1, der von den angegebenen Lösungen erzeugt wird; also gilt:

$$U_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

(ii) Nach der Dreipunkte-Formel ist der gegebene affine Unterraum gleich

$$W = p_1 + (p_2 - p_1)\mathbb{R} + (p_3 - p_1)\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

Der zu W gehörende (parallele lineare) Unterraum ist

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

Der Orthogonalraum zu U_2 besteht genau aus allen Vektoren von $\mathbb{R}^4$, deren Skalarprodukt mit allen Vektoren von U_2 gleich 0 ist und damit dem linearen Gleichungssystem $(*)$ genügen. Es folgt $U_2^\perp = U_1$. Der gesuchte Raum $W^\perp$ ist damit parallel zu U_1. Es folgt:

$$W^\perp = p_3 + U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$