Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe F2 (LGS, geometrische Interpretation)

(a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen s und t, für die das folgende reelle lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt:

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} 4\,\xi_1 + 6\,\xi_2 + 2\,\xi_3 & = & 2 \\ 2\,\xi_1 + 3\,\xi_2 + t\,\xi_3 & = & s \end{array} \right.$$

(b) Interpretieren Sie die Situation von Teil (a) geometrisch!
Hinweis: Eigenschafen von Ebenen, Normalenvektoren und Parallelität in $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3)$ dürfen Sie unbewiesen benutzen.

Lösungsskizze

(a) Das Gleichungssystem $(*)$ ist genau dann nicht lösbar, wenn seine Koeffizientenmatrix anderen Rang hat als seine erweiterte Koeffizientenmatrix, wenn also gilt:

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & t \end{pmatrix} < \mathrm{Rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & t & s \end{array}\right).$$

Da beide Matrizen höchstens Rang 2 haben (2 Zeilen !) und die linke mindestens Rang 1, muss die linke Matrix zum Erfüllen der geforderten Eigenschaft von $(*)$ genau Rang 1 und die rechte genau Rang 2 haben. Dies ist nur der Fall, wenn $t = 1$ ist und $s \neq 1$.

(b) Das LGS $(*)$ ist nicht lösbar, wenn die beiden durch die Gleichungen bestimmten Ebenen von $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3)$ parallel und verschieden sind. Parallelität bedeutet, dass die beiden Normalenvektoren der Ebenen, also die Zeilen der Koeffizientenmatrix, linear abhänig sind, woraus $t = 1$ folgt; und Verschiedenheit der Ebenen heißt, dass die Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix nicht linear voneinander abhängen, also $s \neq 1$ ist.