Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

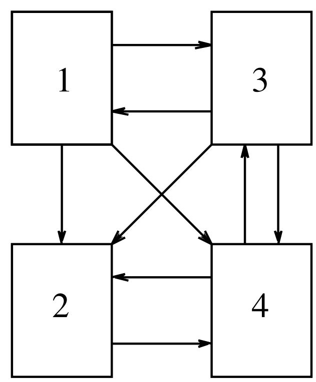
Aufgabe F1 (LGS und Internetsuche)[1]

Beim "PageRank-Algorithmus" zur Bewertung der Wichtigkeit z.B. von Webseiten wird jeder Seite k eine Wichtigkeit $x_k \geq 0$ zugeordnet; die Seite k ist wichtiger als Seite j, wenn $x_k > x_j$ gilt. Statt die direkten Links zu zählen, werden die "Backlinks" bewertet, d.h. die auf die entsprechende Seite verweisenden Links: Je mehr andere Seiten ein "Votum" für Seite k abgeben, desto wichtiger ist diese Seite. Beim PageRank-Algorithmus ist x_k die Summe der mit dem Faktor $\frac{1}{n_i}$ gewichteten Wichtigkeiten x_i der Seiten mit Backlinks zu Seite k, wobei n_i die Anzahl der von Seite i ausgehenden Links bezeichne.

Bei dem "4-Seiten-Internet" der nebenstehenden Abbildung ist z.B.

$$x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2},$$

weil Seite 3 einen Backlink von Seite 1 und von Seite 4 hat und 3 Links von Seite 1 und zwei Links von Seite 4 ausgehen.



(i) Geben Sie die Gleichungen zur Bestimmung der Wichtigkeiten x_k der 4 Seiten an!

(ii) Lösen Sie dieses Gleichungssystem !

(iii) Welche ist die wichtigste Seite des angegebenen "4-Seiten-Internets" ?

[1] Frei nach: J.Liesen und V.Mehrmann: Lineare Algebra, Springer Spektrum ^{2}2015 1.1

Lösungsskizze

(i) Man erhält das Gleichungssystem

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{x_3}{3} & (1) \\ x_2 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{2} & (2) \\ x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2} & (3) \\ x_4 = \frac{x_1}{3} + x_2 + \frac{x_3}{3} & (4) \end{cases}$$

(ii) Eine (einfache) Möglichkeit[2] zur Lösung des Gleichungssystems $(*)$ aus (i) ist das sukzessive Einsetzen aus einer Gleichung in eine andere:

(1) in (3): $3x_1 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}$; dies ergibt: $x_1 = \frac{3}{8 \cdot 2} x_4$, (5)
(5) in (1): $x_3 = \frac{9}{16} x_4$, (6)
(1), (5) und (6) in (4): $x_4 = \frac{1}{16} x_4 + x_2 + \frac{3}{16} x_4$, also $x_2 = \frac{3}{4} x_4$. (7)

Anmerkung: Es ist unbedingt nötig, umgekehrt diese Werte in das ursprüngliche Gleichungssystem einzusetzen, da evtl. Gleichungen unter den Tisch fallen oder Operationen nicht umkehrbar sein können.

Tatsächlich zeigt sich durch Einsetzen, dass Werte für x_1, x_2, x_3 und x_4, die (5),(6) und (7) erfüllen, auch dem Gleichungssystem $(*)$ genügen.

Es gibt also nicht nur eine Lösung, sondern unendlich viele (zu jedem Wert von x_4 mit $x_4 > 0$ eine). Da sich aber zwei verschiedene Lösungsquadrupel nur um einen positiven Faktor (eine "Skalierung") unterscheiden und sich die Größenverhältnisse unter den x_i bei der Skalierung nicht ändern, reicht es aus, eine spezielle Lösung zu betrachten, z.B. [3]

$$x_1 = 0,135, \quad x_2 = 0,54, \quad x_3 = 0,405 \text{ und } x_4 = 0,72.$$

(iii) Die wichstigste Seite ist nach (ii) die Seite 4.

[2] Wir werden weitere Verfahren lernen, z.B. die Lösung mittels elementarer Zeilenumformungen bzw. Gaußschem Eliminations-Algorithmus.

[3] Dieses Beispiel, allerdings mit MATLAB berechnet und auf die zweite Nachkommastelle gerundet, nehmen J.Liesen und V.Mehrmann in: Lineare Algebra, Springer Spektrum [2]2015 1.1.