Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra I'

Aufgabe E2* (Affine Abbildung, Ebenen-Parallelität)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax + t$ eine bijektive affine Abbildung des affinen Raumes AG($\mathbb{R}^3$) auf sich (mit zugehöriger regulärer Matrix A und festem Vektor $t \in \mathbb{R}^3$). Zeigen Sie, dass f parallele Ebenen von AG($\mathbb{R}^3$) auf parallel Ebenen abbildet!

Lösungsskizze
Seien $E_i = U_i + b_i$ mit $i \in \{1, 2\}$ Ebenen aus AG($\mathbb{R}^3$) , also U_1, U_2 zweidimensionale Unterräume von $\mathbb{R}^3$. Es gilt dann

$$E_1 || E_2 \Longleftrightarrow U_1 = U_2.$$

Da f bijektiv ist, also A regulär, ist auch $f_A(U_1) = f_A(U_2)$ ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$, und es gilt für die Bilder von E_i

$$f(E_1) = f_A(U_1) + f_A(b_1) \;\; || \;\; f_A(U_1) + f_A(b_2) = f(E_2).$$

$\square$