Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra I'

Aufgabe D8 (Rang einer Matrix)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,5)}$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Rang} A$.

Lösungsskizze:
Da die Spalten von A in $\mathbb{R}^3$ liegen, folgt $\operatorname{Rang} A \leq 3$. Um die Behauptung

$$\operatorname{Rang} A = 3$$

zu zeigen, reicht es z.B. aus, die lineare Unabhängigkeit der ersten 3 Spalten zu beweisen. Sei also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem hat die Koeffizientenmatrix $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, deren Regularität gezeigt wird (und mit der man auch ohne Aufstellung des Linearen Gleichungssystems beginnen kann).
Durch elementare Umformungen (3.Zeile minus 2.Zeile; 2.Zeile minus 1.Zeile) erhält man aus $\hat{A}$ dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und daraus} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

woraus die Regularität von $\hat{A}$, die lineare Unabhängigkeit der ersten 3 Spalten von A und damit die Rangbehauptung für A folgt.
Alternativ kann man die entsprechenden Zeilenumformungen auch bei A selbst durchführen.
Anmerkung: Anstelle von elementaren Zeilenumformungen oder statt Aufstellen eines Linearen Gleichungssystems kann man (bei Kenntnis der Eigenschaften von Determinanten) die lineare Unabhängigkeit der ersten 3 Spalten auch sofort aus

$$\det \hat{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (3-1)(2-1) \neq 0 \quad \text{(Vandermonde-Determinante)}$$

folgern.