Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra I'

Aufgabe D6 (Matrix, Kern einer linearen Abbildung)
Seien V ein $3-\dim$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ und f ein Endomorphismus von V, also eine lineare Abbildung $f : V \to V$. Der Kern U von f habe Dimension 1; ferner seien b_1 und b_2 linear unabhängige Vektoren aus V mit $f(b_1 + b_2) = 2b_1$ und $f(b_1 - b_2) = 2b_2$ sowie $< b_1, b_2 > \cap U = \{0\}$.
Wählen Sie eine Basis B von V geeignet aus, und geben Sie die f und f^2 darstellenden Matrizen $M_B^B(f)$ und $M_B^B(f^2)$ an!

Lösungsskizze

Sei $U = b_3K$, also $B_U = \{b_3\}$ eine Basis von U. Wegen $< b_1, b_2 > \cap U = \{0\}$ ist b_3 von b_1 und b_2 linear unabhängig; daher bilden b_1, b_2, b_3 eine Basis B des $3-\dim$ Vektorraums V.
Da f linear ist, folgt aus $f(b_1 + b_2) = 2b_1$ und $f(b_1 - b_2) = 2b_2$ unmittelbar $f(b_1) + f(b_2) = 2b_1$ und $f(b_1) - f(b_2) = 2b_2$, was äquivalent zu

$$f(b_1) = b_1 + b_2 \quad \text{und} \quad f(b_2) = b_1 - b_2$$

ist. Konstruktionsgemäß gilt ferner $f(b_3) = 0$.
Damit erhält man:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$M_B^B(f^2) = M_B^B(f) \cdot M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ erhält man $M_B^B(f^2)$ auch aus $f^2(b_1) = f(b_1 + b_2) = f(b_1) + f(b_2) = 2b_1$ und $f^2(b_2) = f(b_1 - b_2) = f(b_1) - f(b_2) = 2b_2$.