## Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
## 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

### Aufgabe C3 (Lineare Unabhängigkeit binär)

(i) Gegeben seien die Vektoren $p_1$ bis $p_9$ aus $\mathbb{F}_2{}^9$ mit:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
p_1 & := & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
p_2 & := & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
p_3 & := & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
p_4 & := & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_5 & := & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_6 & := & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
p_7 & := & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
p_8 & := & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_9 & := & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass diese Vektoren linear abhängig sind!
*Lösungshinweis:* Kombinieren Sie geeignete dieser Vektoren zum Nullvektor!
(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren $q_1, q_2, q_3$ und $q_4$ aus $\mathbb{F}_2{}^5$ linear unabhängig sind:

$$\begin{array}{lcccccc}
q_1 & := & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
q_2 & := & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
q_3 & := & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
q_4 & := & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

**Lösungsskizze**

(i) Z.B. addieren sich $p_1, p_3$ und $p_8$ zum Nullvektor; auch gilt $p_2+p_4+p_7+p_9 = 0$. Wenn man diese Abhängigkeiten nicht durch Ausprobieren findet, muss man das folgende Lineare Gleichungssystem lösen, das sich aus $\sum_{i=1}^{9} c_i p_i = 0$ ergibt:

$$\begin{array}{cccccccccl}
c_1+ & c_2+ & c_3+ & c_4+ & c_5 & & & & & = 0 \\
 & c_2+ & c_3+ & c_4+ & c_5+ & & c_7+ & c_8+ & c_9 & = 0 \\
c_1+ & & c_3+ & & & & c_7+ & & c_9 & = 0 \\
 & & & c_4+ & & & & & c_9 & = 0 \\
 & c_2+ & & & & c_6+ & & & c_9 & = 0 \\
 & & & & & c_6 & & & & = 0 \\
 & c_2+ & & & & & c_7 & & & = 0 \\
c_1+ & & c_3 & & & & & & & = 0
\end{array}$$

(ii) Aus $c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3 + c_4q_4 = 0$ mit $c_i \in \mathbb{F}_2$ ergibt sich durch Komponentenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccl} c_1 & +c_2 & & & = 0 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 & = 0 \\ & & & c_4 & = 0 \\ c_1 & & & +c_4 & = 0 \\ & & & c_4 & = 0, \end{array}$$

das nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ hat. Daher sind $q_1, q_2, q_3, q_4$ linear unabhängig.