Zusatz-Übung zum Lehrerweiterbildungskurs
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe C1* (Lineare Unabhängigkeit von Funktionen)

Sei V der Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die trigonometrischen Funktionen $c_1 : x \mapsto \cos x$, $c_2 : x \mapsto \cos 2x$, $s_1 : x \mapsto \sin x$, $s_2 : x \mapsto \sin 2x$, $s_3 : x \mapsto \sin 3x$ linear unabhängig sind.

Lösungsskizze:
Sei $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 + \mu_3 s_3 = 0$. Einsetzen von $x = 0$ und $x = \pi$ ergibt

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Einsetzen von $x = \pi/2$, von $x = \pi/4$ und $x = 3\pi/4$ zeigt

$$\mu_1 + 0 - \mu_3 = 0 \quad \text{und} \quad \mu_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \mu_2 + \mu_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

und damit, dass auch die μ_i gleich 0 sind.
Alternative: Mehrfache Ableitung der Gleichung und Einsetzen von $x = 0$ und $x = \pi$.