Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe B5 (Unterräume spezieller Vektorräume)[1]

Welche der folgenden Teimengen W_i der Vektorräume V_i sind Unterraum von V_i (für $i \in \{1, 2, 3\}$) ?

(i) In V_1, dem Vektorraum aller reellen $2 \times 2-$Matrizen, sei W_1 die Menge der Matrizen A mit $A^2 = A$.

(ii) Im Vektorraum V_2 aller Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sei

$$W_2 := \{f \in V_2 \,|\, f(3) = 0\}.$$

(iii) Im Vektorraum $V_3 = \mathbb{R}[X]$ aller reellen Polynome sei W_3 die Menge aller Polynome der Form $b_0 + b_1X^2 + b_2X^4 + \ldots b_nX^{2n}$, also der Polynome mit ausschließlich geraden Potenzen von X.

Lösungsskizze

(i) W_1 ist kein Unterraum von V_1; denn W_1 ist nicht abgeschlosssen bzgl. S-Multiplikation: Z.B. ist $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in W_1, aber $2I_2$ wegen $(2I_2)^2 = 4I_2 \neq 2I_2$ nicht!

(ii) W_2 ist ein Unterraum von V_2. Denn:

- $W_2 \neq \emptyset$ (Z.B. ist die Nullfunktion, die alle reellen Zahlen auf 0 abbildet, in W_2).
- Sind f und g in W_2, also insbesondere Abbildungen mit $f(3) = 0 = g(0)$, so gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ auch

  $$(af + bg)(3) = af(3) + bg(3) = a0 + b0 = 0$$

  und folglich $af + bg \in W_2$.

Nach dem Unterraumkriterium ist daher W_2 ein Unterraum von V_2.

(iii) W_3 ist nicht leer (Z.B. $X^2 \in W_3$), und die Summe und skalare Vielfache von Elementen von W_3 liegen wieder in W_3. Erneut nach dem Unterraumkriterium ist daher W_3 ein Unterraum von V_3

[1] frei nach Aufgaben aus Seymour Lipschutz: Linear Algebra. Schaum's Outline Series, McGraw-Hil 1968, 1974, Chap.4.