Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe B3 (Vektorraumgesetze)[1]

Betrachten Sie folgende Kandidaten $(V, +, \cdot_K)$ für $K-$Vektorräume und geben Sie gegebenenfalls an, welche Vektorraumgesetze verletzt sind. (Mit Gegenbeispiel, aber ohne Nachweis der Richtigkeit eines Gesetzes).

(i) $V_1 = (\mathbb{R}, +, *)$ mit $K = \mathbb{R}$, der üblichen Addition $''+''$ auf $\mathbb{R}$ und der S-Multiplikation
$$\alpha * x := \alpha^2 \cdot x.$$

(ii) $V_2 = (\mathbb{R}^2, +, *)$ mit $K = \mathbb{R}$, komponentenweiser Addition $''+''$, also
$$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) := (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2),$$
und
$$\alpha * (\beta, \gamma) := (\alpha \cdot \beta, 0).$$

(iii) $V_3 = (\mathbb{R}, +, *)$ mit $K = \mathbb{Q}$, der üblichen Addition “$+''$ auf $\mathbb{R}$ sowie
$$\alpha * x := \alpha \cdot x.$$

Lösungsskizze

(i) In V_1 ist das folgende Distributivgesetz verletzt:
$$(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v;$$
Beispiel (mit $\alpha = \beta = v = 1$):
$$(1 + 1) * 1 = 2 * 1 = 4 \cdot 1 = 4,$$
aber
$$1 * 1 + 1 * 1 = 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 2.$$
(*Anmerkung:* Alle anderen Vektorraum-Gesetze sind erfüllt.)

[1] frei nach P.R.Halmos: Linear Algebra Problem Book. The Mathematical Association of America 1995.

(ii) Das Verhalten der 1 entspricht nicht dem entsprechenden Vektorraumgesetz:

$$1 * (\beta, \gamma) = (1 \cdot \beta, 0) = (\beta, 0) \neq (\beta, \gamma) \text{ für } \gamma \neq 0.$$

(*Anmerkung:* Alle anderen Vektorraum-Gesetze sind erfüllt.)

(iii) $V_3 = (\mathbb{R}, +, *)$ ist tatsächlich ein $\mathbb{Q}-$Vektorraum. Denn $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe und die übrigen Vektorraumgesetze gelten, da sie in in $\mathbb{R}$ gültig sind und die Einschränkung der Skalare auf $\mathbb{Q}$ diese nicht ändern.

Anmerkung: Allgemeiner gilt: Ist K Unterkörper eines Körpers L, so ist $(L, +, *)$ mit der Addition $''+''$ von L und der Definition $\lambda * v := \lambda \cdot v$ stets ein $K-$Vektorraum.