Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe B1 (Permutationsgruppe, Untergruppe)

(i) Geben Sie die Elemente der Gruppe $(\mathcal{S}_3, \circ)$ der Permutationen von $\{1, 2, 3\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung an!

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Element $\tau \in \mathcal{S}_3$ die Ordnung $o(\tau) := |<\tau>|$.

(iii) Geben Sie alle Untergruppen von $(\mathcal{S}_3, \circ)$ und deren Ordnungen an!
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie den folgenden Satz von Lagrange benutzen:
Für jede Untergruppe U einer endlichen Gruppe G ist die Ordnung $|U|$ von U Teiler der Ordnung $|G|$ von G.

Lösungsskizze

(i) (Vgl. mit Figur 3.3 des Vorlesungsskripts!)
$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(ii) $o(\mathrm{id}) = 1$; $o(\sigma_i) = 2$ wegen $\sigma_i^2 = \mathrm{id}$ $(i = 1, 2, 3)$
$o(\delta_j) = 3$ $(j = 1, 2)$, da

$$\delta_1 \circ \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \delta_2$$

$$\delta_2 \circ \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \delta_1 \ ,$$

$$\delta_1 \circ \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{id}, \quad \delta_1^3 = \delta_1 \circ (\delta_1 \circ \delta_1) = \delta_1 \circ \delta_2 = \mathrm{id}.$$

(iii) $\{\mathrm{id}\}$ hat Ordnung 1
$< \mathrm{id}, \sigma_i >$ hat Ordnung 2 für $i = 1, 2, 3$.
$| < \mathrm{id}, \delta_1, \delta_2 > | = 3$
$|\mathcal{S}_3| = 6$.
(Insgesamt 6 Untergruppen). Aus $|\mathcal{S}_3| = 6$ folgt mit dem Satz von Lagrange $|U| \in \{1, 2, 3, 6\}$. Damit kann man sehen, dass es keine weiteren Ungtergruppen gibt.