Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe B1* (Untergruppe)

Zeigen Sie: Ist $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe, und ist U eine bezüglich $\cdot$ abgeschlossene (nicht-leere) Teilemenge von G, so ist $(U, \cdot|_U)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$.

Lösungshinweis: Zeigen Sie für $u \in U$, dass die Abbildung

$$f_u : \quad U \to U \quad \text{mit} \quad v \mapsto u \cdot v$$

eine Bijektion ist, und folgern Sie daraus $e, u^{-1} \in U$!

Lösungsskizze

Da $u \cdot u_1 = u \cdot u_2 \Longrightarrow u_1 = u_2$ in G gilt, ist f_u injektiv, aus Anzahlgründen daher auch surjektiv, insgesamt eine Bijektion.
Es gibt daher ein Urbild von u, also Element $u_3 \in U$ mit $f_u(u_3) = u \cdot u_3 = u$, woraus $u_3 = e \in U$ folgt.
Das Urbild von e unter f_u, also u_4 mit $e = f_u(u_4) = u \cdot u_4$ ist gleich u^{-1} und in U.
Aus dem Untergruppen-Kriterium folgt dann die Behauptung. $\square$