Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe A2* (Parallelogramm)

Zusatz zu Aufgabe A2

Sei $\Diamond ABCD$ ein nicht-ausgeartetes Parallelogramm in der affinen Ebene über dem Körper GF(2)($= \mathbb{F}_2$) (allgemeiner: über einem Körper, in dem $2 = 0$ gilt, – einem sogenannten Körper der Charakteristik 2).
Zeigen Sie vektoriell: Die Diagonalen AC und BD schneiden sich nicht!

Lösungsskizze (2.Teil weitgehend analog mit der von Aufgabe A2)

Ist $\Diamond ABCD$ ein nicht-ausgeartetes Parallelogramm in der affinen Ebene über dem Körper GF(2), die ja nur 4 Punkte enthält, so existiert kein von den Eckpunkten verschiedener Punkt. Daher können sich die Diagonalen nicht schneiden.
Sei nun $\Diamond ABCD$ ein nicht-ausgeartetes Parallelogramm in der affinen Ebene über einem anderen Körper mir $2 = 0$, also $1 = -1$. Sei ferner A als Ursprung gewählt; bezeichenen dann $\vec{b}$ und $\vec{d}$ die Ortsvektoren von B bzw. D, so gilt: $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ ist der Ortsvektor von C.
Die Gerade AC hat die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = s\,\vec{c} = s\,(\vec{b} + \vec{d}),$$

die Gerade BD (in der Zwei-Punkte-Form) die Darstellung

$$\vec{y} = \vec{b} + t\,(\vec{d} - \vec{b}).$$

Die Richtungsvektoren beider Geraden $\vec{b} + \vec{d}$ bzw. $\vec{d} - \vec{b} = \vec{d} + \vec{b}$ sind (wegen $2 = 0$, also $1 = -1$) linear abhängig (sogar gleich). Da die Geraden parallel und verschieden sind, gibt es keinen Schnittpunkt.