Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	Note

Nachklausur (Modulprüfung) zum Lehrerweiterbildungskurs 6 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' WiSe 2016/17

Bearbeiten Sie bitte drei der vier folgenden Aufgaben!
Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen!**
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Vektorrechnung: Gerade, Ebene, Orthogonalität, Schnittpunkt)
Seien $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$ sowie g die Gerade in $\mathbb{R}^3$, die durch den Nullpunkt und den Punkt $P := (-2, 0, 2)$ geht.

1. Geben Sie die Menge der Ortsvektoren der Punkte von g an!
2. Bestimmen Sie die Ebene E, die von g und dem Punkt $Q = (0, 0, 2)$ aufgespannt wird!
3. Zeigen Sie, dass die Gerade $h = (1, 0, 1) + (0, 1, 0)\mathbb{R}$ orthogonal zu E ist!
4. Berechnen Sie den Schnittpunkt S von E und h !

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit, Basis, Linearkombination)

1. Stellen Sie den Vektor $(2, 4, 0)$ aus $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren $(1, 2, 1)$ und $(0, 0, 2)$ dar!
2. Sei $t \in \mathbb{R}$ und $M_t := \{(1, 1), (1, 2), (t, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Geben Sie (ohne Beweis) alle Basen B von $\mathbb{R}^2$ mit $B \subseteq M_t$ an (mit Fallunterscheidungen für t)!
3. Warum sind die Polynome $X - 1, \quad X^2 - X + 1, \quad X^3 - X^2 + X - 1$ aus $\mathbb{R}[X]$ linear unabhängig?

Aufgabe 3 (lineare Abbildung, Bild, Kern, Dimension eines affinen Unterraums)

Seien $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$ sowie $B = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis von V.

(i) Begründen Sie mit einem Satz aus der Vorlesung, dass es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$f(e_1) = e_1 + e_3, \quad f(e_2) = e_2 \quad \text{und} \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

(ii) Geben Sie (ohne Begründung) die darstellende Matrix A von f bzgl. B an, also

$$A := M_B^B(f).$$

(iii) Welchen Rang hat A ?

(iv) Bestimmen Sie Bild(f)!.

(v) Zeigen Sie, dass Kern$(f) = (e_1 + e_2 - e_3)\mathbb{R}$ gilt.

(vi) Berechnen Sie $f(g)$ für $g = e_1 + (e_1 + e_2 - e_3)\mathbb{R}$. Welche Dimension haben g und $f(g)$?

Aufgabe 4 (Lineares Gleichungssystem, affine Unterräume)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$):

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +8x_3 & = & 5 \\ & x_2 & +x_3 & = & 1. \end{array} \right.$$

1. Geben Sie (ohne Begründung) die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ an!

2. Begründen Sie zunächst ohne Berechnung der Lösungen, dass $(*)$ lösbar ist!

3. Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform!

4. Geben Sie den Lösungsraum L von $(*)$ an!

5. Interpretieren Sie die Menge der Lösungen E_i der Zeile i von $(*)$ geometrisch als affinen Unterraum in AG$(\mathbb{R}^3)$ (für i=1,2,3), ebenso den Lösungsraum L als affinen Unterraum, und geben Sie die Beziehung von L zu den E_i an!

Lösungsskizzen

zu Aufgabe 1

1. Die Gerade g ist (als 1-dim Unterraum) erzeugt vom Ortsvektor $\vec{p}$ von P; also
$$g = OP = (0,0,0) + \vec{p}\,\mathbb{R} = (-2,0,2)\,\mathbb{R}.$$

2. Bezeichnet $\vec{q}$ den Ortsvektor von Q, so wird E vom Nullpunkt und den Punkten P und Q aufgespannt; also gilt
$$E = (0,0,0) + \vec{p}\mathbb{R} + \vec{q}\mathbb{R} = (-2,0,2)\mathbb{R} + (0,0,2)\mathbb{R} = (1,0,0)\mathbb{R} + (0,0,1)\mathbb{R}.$$
Alternative Begründung: Bezeichnen wir die Achsen des kanonischen Koordinatensystems von $\mathbb{R}^3$ als $x-, y-$ bzw. $z-$Achse, dann liegen sowohl g als auch Q in der $xz-$ Ebene (also der Ebene mit Gleichung $y = 0$), und es gilt $Q \notin g$. Daher spannen g und Q die $xz-$ Ebene auf.

3. Eine Gerade h ist genau dann zu E ortogonal, wenn ihr Richtungsvektor zu jedem von zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren von E orthogonal ist, das Skalarprodukt also jeweils 0 ist. Wegen $h = (1,0,1) + (0,1,0)\mathbb{R}$,
$$(0,1,0)\cdot(-2,0,2) = 0 \quad \text{und} \quad (0,1,0)\cdot(0,0,2) = 0$$
bzw. $(0,1,0)\cdot(1,0,0) = 0 = (0,1,0)\cdot(0,0,1)$ folgt die Behauptung.

   Alternative Begründung: Als Parallele zur y-Achse ist h orthogonal zu E, der $xz-$Ebene.

4. Zu bestimmen ist $S = h \cap E$, also Elemente α, β, γ aus $\mathbb{R}$ mit
$$(1,0,1) + (0,1,0)\alpha = (-2,0,2)\beta + (0,0,2)\gamma.$$
Der *Vergleich der Koordinaten* liefert
$$\left\{\begin{array}{rrr} 1 + 0\cdot\alpha = & -2\ \beta + & 0\cdot\gamma \\ 0 + 1\cdot\alpha = & 0\cdot\beta + & 0\cdot\gamma \\ 1 + 0\cdot\alpha = & 2\ \beta + & 2\ \gamma \end{array}\right. \qquad (\text{für} \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}).$$
Es ergibt sich: $\alpha = 0$ und $2 = 0 + 2\gamma$ (1.plus 3.Zeile), also $\beta = -\frac{1}{2}$ und $\gamma = 1$.
(Notwendige!)PROBE: $(1,0,1)+0 = (1,0,1) = (-2,0,2)(-\frac{1}{2}) + (0,0,2)\cdot 1$. Also $S = (1,0,1)$.
Alternative 1: $(1,0,1) + (0,1,0)\alpha = (1,0,0)\beta + (0,0,1)\gamma$ gilt genau für $\alpha = 0$ und $\beta = \gamma = 1$.
Alternative 2: E ist die $xz-$Ebene, und die Parallele h' zu h durch $(0,0,0)$ ist die $y-$Achse. Die Translation mit dem Vektor $\vec{t} := (1,0,1)$ lässt E fest und bildet h' auf h ab, daher $(0,0,0)$ auf S; es gilt folglich $\vec{s} = \vec{t}$ (für den Ortsvektor $\vec{s}$ von S).

zu Aufgabe 2

1. *Heuristik:* Sei $(2,4,0) = (1,2,1)\lambda + (0,0,2)\mu$. Dann ergibt sich

$$\left\{\begin{array}{rrcl} 1\cdot\lambda & +0\cdot\mu & = & 2 \\ 2\cdot\lambda & +0\cdot\mu & = & 4 \\ 1\cdot\lambda & +2\cdot\mu & = & 0 \end{array}\right. ,$$

   woraus $\lambda = 2$ und $\mu = -\frac{1}{2}\lambda + = -1$ folgt.
   PROBE: $(1,2,1)\cdot 2 + (0,0,2)\cdot(-1) = (2,4,0)$.

2. Wegen $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ besteht jede Basis von $\mathbb{R}^2$ aus genau zwei linear unabhängigen Vektoren. Von den $\binom{3}{2}$ Paaren aus M_t sind linear unabhängig und damit Basis:

   $\{(1,1),(1,2)\}$, $\{(1,1),(t,1)\}$ (falls $t \neq 1$) und $\{(1,2),(t.1)\}$ (falls $t \neq \dfrac{1}{2}$).

3. Aus

$$(X-1)\lambda_0 + (X^2 - X + 1)\lambda_1 + (X^3 - X^2 + X - 1)\lambda_2 = 0$$

   folgt

$$-\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 + X(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2) + X^2(\lambda_1 - \lambda_2) + X^3\lambda_2 = 0.$$

   Da die Familie der Polynome $(X^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]$ ist, daher die Koeffizienten eines Polynoms eindeutig bestimmt sind, ergibt sich (durch Koeffizientenvergleich)

$$\left\{\begin{array}{rrrl} -\lambda_0 & +\lambda_1 & -\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_0 & -\lambda_1 & +\lambda_2 & = 0 \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & = 0 \\ & & \lambda_2 & = 0. \end{array}\right.$$

   Es folgt $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und daraus die lineare Unabhängigkeit der angegebenen Polynome.

zu Aufgabe 3

(i) Laut Fortsetzungssatz gibt es bei beliebig vorgegebenen Bildern der Vektoren einer Basis (mittels linearer Fortsetzung) eine lineare Abbildung mit diesen Bildern.

(ii)

$$A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Da die erste und dritte Zeile von A übereinstimmen, ist der Rang von A höchstens zwei; wegen der linearen Unabhängigkeit von Zeile 1 und Zeile 2 erhält man

$$\text{Rang}(A) = 2.$$

(iv) Das Bild einer linearen Abbildung wird von den Bildern der Vektoren einer Basis erzeugt. Es gilt daher hier:

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) \quad &=< f(e_1), f(e_2), f(e_3) > \quad =< e_1+e_3, e_2, e_1+e_2+e_3 > \\ &= e_2\mathbb{R} + (e_1+e_3)\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, da
$(e_1+e_3)\alpha + e_2\beta + (e_1+e_2+e_3)\gamma = (e_1+e_3)(\alpha+\gamma) + e_2(\beta+\gamma)$.

(v) Zur Bestimmung von Kern(f) gehen wir zu Koordinaten und zur Matrix A_{erw} des entsprechenden homogenen Gleichungssystems über und formen noch elementar um (3.Zeile minus 1.Zeile):

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) ist also genau dann Element von Kern(f), wenn ξ_1, ξ_2, ξ_3 das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \xi_1 & & +\xi_3 = 0 \\ & \xi_2 & +\xi_3 = 0 \end{array} \right.$$

erfüllen, also $\xi_1 = -\xi_3 = \xi_2$ gilt. Das zeigt:

$$\text{Kern } (f) = \{(\xi_1, \xi_1, -\xi_1) \mid \xi_1 \in \mathbb{R}\} = (e_1 + e_2 - e_3)\mathbb{R}.$$

(vi) Unter Verwendung der Linearität von f folgt

$$f(g) = f(e_1) + f(e_1+e_2-e_3)\mathbb{R} \overset{(v)}{=} f(e_1) + 0 = f(e_1) = e_1 + e_3.$$

Es sind g und $f(g)$ affine Unterräume von $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3)$ mit $\dim_{\mathbb{R}} g = 1$ (Gerade) und $\dim_{\mathbb{R}} f(g) = 0$ (Punkt).

zu Aufgabe 4

1. Die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ ist $A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

2. A_{erw} hat den gleichen Rang wie die Koeffizientenmatrix A von $(*)$. (Dies folgt z.B. daraus, dass die letzte Spalte von A_{erw} gleich der Summe der beiden ersten Spalten ist, sodass die Erweiterung nicht den Rang erhöht. *Alternativ* erhält man die letzte Spalte als Linearkombination der anderen Spalten durch die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma.$$

Nach dem bekannten Lösbarkeitskriterium ergibt sich die Lösbarkeit von $(*)$ aus Rang A = Rang A_{erw}.

3. Zum Beispiel:

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | \, 1 \\ 3 & 2 & 8 & | \, 5 \\ 0 & 1 & 1 & | \, 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | \, 1 \\ 0 & 2 & 2 & | \, 2 \\ 0 & 1 & 1 & | \, 1 \end{pmatrix} \quad (\overline{z_2} = z_2 - 3z_1)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | \, 1 \\ 0 & | \, 1 & 1 & | \, 1 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \end{pmatrix} \quad (\overline{\overline{z_2}} = \frac{1}{2}\overline{z_2} \text{ und } \overline{\overline{z_3}} = \overline{z_3} - \overline{\overline{z_2}}).$$

4. Da elementare Zeilenumformungen den Lösungsraum nicht verändern, sind die Lösungen von $(*)$ genau die Lösungen von

$$(**) \quad \begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & + \; x_3 & = & 1 \end{cases} .$$

Setzt man nun $x_3 = 0$, so sieht man, dass z.B. $x_p = (1, 1, 0)$ eine (Partikulär-) Lösung von $(**)$ und damit von $(*)$ ist.

Der Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems ist gleich dem Lösungsraum des zu $(**)$ ghörenden homogenen Systems, also von

$$(**') \quad \begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + \; x_3 & = & 0 \end{cases} .$$

Es folgt
$L_0 = \{(-2x_3, -x_3, x_3) \,|\, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-2, -1, 1)x \,|\, x \in \mathbb{R}\} = (-2, -1, 1)\mathbb{R}$.
Und als ob das alles nicht schlimm genug wÃre: Es reichen schon winzigste Mengen, um sich anzustecken. Geraten auch nur zehn bis 100 Erreger auf die HÃnde gesunder Menschen und von dort - meist Ã¼ber das Essen - in den Mund, ist die Wahrscheinlichkeit hoch, dass auch sie erkranken.

(*Alternativ* kann man $x_3 = 1$ in $(**')$ setzen und so $(-2, -1, 1) \in L_0$ sehen. Das obige Ergebnis ergibt sich dann z.B. aus Dimensionsgründen.)

Der Lösungsraum von $(**)$ und damit von $(*)$ ist nach einem Satz gleich $x_P + L_0$, also

$$L = (1, 1, 0) + (-2, -1, 1)\mathbb{R} = \{(1 - 2x, 1 - x, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

5. Jedes E_i ist ein affiner Unterraum der Dimension $3 - 1$, also eine Ebene, die Lösungsmenge L eine Gerade von $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3)$, die der Durchschnitt der drei Ebenen E_i ist, also $L = E_1 \cap E_2 \cap E_3$.