Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	Note

Klausur (Modulprüfung) zum Lehrerweiterbildungskurs 6 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' WiSe 2016/17

Bearbeiten Sie bitte drei der vier folgenden Aufgaben!
Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen!**
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte (und evtl. Sonderpunkte).
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Vektorrechnung: Gerade, Orthogonalität, Schnittpunkt)
Seien $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$ sowie g die Gerade in $\mathbb{R}^2$, die durch den Nullpunkt und den Punkt $P := (-2, 2)$ geht.

1. Geben Sie die Ortsvektoren der Punkte von g an!
2. Bestimmen Sie die zur Geraden g orthogonale Gerade h durch den Punkt $Q := (2, 0)$.
3. Berechnen Sie den Schnittpunkt S von g und h !
4. Bestimmen Sie den von Q verschiedenen Punkt R mit $R \in h$ und $|\overline{QS}| = |\overline{RS}|$ (also das Bild von Q unter der Spiegelung an der Geraden g)! *Lösungshinweis:* Beachten Sie $\vec{r} = \vec{s} + (\vec{s} - \vec{q})$ (für die Ortsvektoren $\vec{r}$ von R und $\vec{q}$ von Q sowie $\vec{s}$ von S)!

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit)

1. Sind die Vektoren $(1, 2, 1), (2, 4, 0), (0, 0, 2)$ aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
2. Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist $M_t := \{(1, 2, 1), (2, 4, 0), (0, t, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ linear unabhängig bzw. linear abhängig ? (Mit Begründung!)
3. Begründen Sie kurz, warum die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind!
4. Warum sind die Polynome $X - 1, \quad X^2 - X, \quad X^3 - X^2$ aus $\mathbb{R}[X]$ linear unabhängig?
5. (mit Zusatzpunkt) Ist die Menge $M := \{X^{i+1} - X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{R}[X]$ linear unabhängig? (Mit Begründung!)

Aufgabe 3 (lineare Abbildung, parallele Geraden, affine Geometrie)

Seien $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$ sowie g_1 und g_2 Geraden von $\mathrm{AG}(V)$ mit Richtungsvektor $m_i(\neq 0)$ und Stützvektor b_i für $i \in \{1, 2\}$. Sei ferner $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung!

(i) Benutzen Sie die Punkt-Richtungsformel für die Bestimmung von g_1 und g_2 (ohne Begründung)!

(ii) Unter welcher Bedingung an m_1 und m_2 sind g_1 und g_2 laut Definition parallel?

(iii) Bestimmen Sie $f(g_1)$ und $f(g_2)$. Unter welcher Bedingung sind $f(g_1)$ und $f(g_2)$ wieder Geraden?

(iv) Zeigen Sie: Ist f bijektiv, so sind die Bilder und die Urbilder unter f von parallelen Geraden ebenfalls parallele Geraden, d.h. dass dann gilt:

$$g_1 || g_2 \iff f(g_1) || f(g_2).$$

(v) (mit Zusatzpunkt) Sind b_1 und m_1 linear unabhängig, so existiert eine lineare Abbildung h mit $h(g_1) = g_2$. (Begründung unter Verwendung von Sätzen aus der Vorlesung!)

Aufgabe 4 (Lineares Gleichungssystem, lineare Abbildung, Matrix)

Bezeichne $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^4$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$!

1. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$)

$$(*) \left\{ \begin{array}{ccccc} \xi_1 + & \xi_2 + & \xi_3 & & = 1 \\ & \xi_2 + & 2\xi_3 & +\xi_4 & = 2 \\ & & \xi_3 & +\xi_4 & = 1 \end{array} \right. .$$

2. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(e_1) = c_1, \quad f(e_2) = c_1 + c_2, \quad f(e_3) = c_1 + 2c_2 + c_3, \quad f(e_4) = c_2 + c_3.$$

   Geben Sie (ohne Begründung) die Matrix von f bzgl. der Basen B und C an, also $M_C^B(f)$!

3. Finden Sie alle Urbilder von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,1)}$ unter der linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^{(4,1)} \to \mathbb{R}^{(3,1)}$ mit Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^{(4,1)}$ bzw. $\mathbb{R}^{(3,1)}$.

4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Aufgabenteilen 1 bis 3 (falls Sie ihne nicht schon vorher angegeben haben)?

Lösungsskizzen

zu Aufgabe 1

1. Die Gerade g ist (als 1-dim Unterraum) erzeugt vom Ortsvektor $\vec{p}$ von P; also
$$g = OP = \vec{p}\,\mathbb{R} = (-2,2)\,\mathbb{R}.$$

2. Bezeichnet $\vec{q}$ den Ortsvektor von Q und $m^\perp$ einen zu $\vec{p}$ orthogonalen Vektor, so gilt $h = \vec{q} + m^\perp\mathbb{R}$ sowie
$$g \perp h \Leftrightarrow (-2,2) \perp m^\perp \Leftrightarrow (-2,2)\cdot m^\perp = 0 \Leftrightarrow m^\perp \in (1,1)\mathbb{R}$$
und damit $h = (2,0) + (1,1)\mathbb{R}$.

   Alternative Begründung: g ist die Diagonale im 2. und 4. Quadranten, damit h die Parallele durch Q zur Diagonalen im 1. und 3. Quadranten.

3. Zu bestimmen ist $S = g \cap h = (-2,2)\mathbb{R} \cap [(2,0) + (1,1)\mathbb{R}]$.
Heuristik:
$$\begin{cases} -2k &= 2+ & l \\ 2k &= & l \end{cases} \qquad \text{(für } k,l \in \mathbb{R}\text{)}.$$
Es ergibt sich durch Addition der Zeilen : $0 = 2 + 2l$, also $l = -1$ und $k = -\frac{1}{2}$.
(Notwendige!) Probe: $-\frac{1}{2}(-2,2) = (1,-1) = (2,0) + (1,1)(-1)$.
Also $S = (1,-1) =: \vec{s}$.

4. Wegen $R \in QS$ und $|\overline{QS}| = |\overline{SR}|$ ergibt sich $\vec{QS} = \vec{SR}$ und damit (vgl. den Lösungshinweis) für den Ortsvektor $\vec{r}$ von R :
$$\vec{r} = \vec{s} + (\vec{s} - \vec{q}) = 2\vec{s} - \vec{q} = (2,-2) - (2,0) = (0,-2).$$
Also ist $R = (0,-2)$.

   Alternativ: Durch die Spiegelung an g wird die positive $x-$Achse auf die negative $y-$Achse abgebildet und damit $Q = (2,0)$ auf $R = (0,-2)$.

zu Aufgabe 2

1. *Heuristik:* Sei $(1,2,1)\lambda + (2,4,0)\mu + (0,0,2)\nu = (0,0,0)$. Dann ergibt sich
$$\begin{cases} \lambda & +2\mu & & = & 0 \\ 2\lambda & +4\mu & & = & 0 \\ \lambda & & +2\nu & = & 0 \end{cases}$$
und daraus $\lambda + 2\mu = 0 = \lambda + 2\nu$, folglich $\mu = \nu$ und $\lambda = -2\mu$.

   Setzt man z.B. $\lambda = -2$ und $\mu = \nu = 1$, so ergibt die (notwendige) Probe:
$$(1,2,1)(-2) + (2,4,0) + (0,0,2) = (0,0,0),$$
also die lineare Abhängigkeit der gegebenen Vektoren.
Alternativ kann man zunächst Teil 2 der Aufgabe lösen und dann den Fall $t = 0$ betrachten.

2. Sei jetzt $(1,2,1)\lambda + (2,4,0)\mu + (0,t,2)\nu = (0,0,0)$. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{cases} \lambda & +2\mu & & = & 0 \\ 2\lambda & +4\mu & +t\nu & = & 0 \\ \lambda & & +2\nu & = & 0 \end{cases}$$

   Die 1. und 2. Gleichung zusammen sind äquivalent zu $t\nu = 0 \wedge \lambda + 2\mu = 0$, die 1. und 3. zu $\mu = \nu \wedge \lambda = -2\nu$.

   Der Fall $t = 0$ ist in Teilaufgabe 1 behandelt: Die gegebenen Vektoren sind linear abhängig.
   Im Fall $t \neq 0$ folgt $\nu = 0 = \mu = \lambda$ und damit die lineare Unabhängigkeit der gegebenen Vektoren.

3. Da $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ ist, also jede Basis (maximal unabhängige Teilemenge) von $\mathbb{R}^3$ genau 3 Elemente enthält, sind die 4 Vektoren linear abhängig,

4. Aus

$$(X-1)\lambda_0 + (X^2 - X)\lambda_1 + (X^3 - X^2)\lambda_2 = 0$$

   folgt $\quad -\lambda_0 + X(\lambda_0 - \lambda_1) + X^2(\lambda_1 - \lambda_2) + X^3\lambda_2 = 0$. Da die Familie der Polynome $(X^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]$ ist, ergibt sich

$$0 = -\lambda_0 = \lambda_0 - \lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2$$

   und daraus die lineare Unabhängigkeit der angegebenen Polynome.

5. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit der gegenene Polynome reicht es, endlich viele zu betrachten, also o.B.d.A.

$$\sum_{i=0}^{n}(X^{i+1} - X^i)\lambda_i = 0$$

   Es folgt für die Koeffizienten von

$$\begin{array}{lrl} X^0: & -\lambda_0 & = 0 \\ X^1: & \lambda_0 - \lambda_1 & = 0 \\ X^2: & \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ & \dots & \\ X^{n+1}: & \lambda_n & = 0 \end{array},$$

   woraus sich $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ ergibt.

zu Aufgabe 3

(i) $g_i = b_i + m_i\mathbb{R} \quad (i = 1, 2)$

(ii) Laut Definition gilt $(b_1 + m_1\mathbb{R})||(b_2 + m_2\mathbb{R})$ genau dann, wenn $m_1\mathbb{R} = m_2\mathbb{R}$ ist, also m_1 und m_2 linear abhängig sind.

(iii) Aus der Linearität von f folgt $f(g_i) = f(b_i + m_i\mathbb{R}) = f(b_i) + f(m_i)\mathbb{R}$ (für $i \in \{1, 2\}$).
$f(g_i)$ ist wieder eine Gerade, wenn m_i nicht in Kern(f) liegt (für $i = 1$ bzw. $i = 2$).

(iv) Ist f bijektiv, so sind die Bilder und Urbilder von Geraden wieder Geraden (vgl.(iii)!) und es gilt:

$$g_1||g_2 \Leftrightarrow m_1\mathbb{R} = m_2\mathbb{R} \Leftrightarrow f(m_1)\mathbb{R} = f(m_2)\mathbb{R} \Leftrightarrow f(g_1)||f(g_2).$$

(v) Sind b_1 und m_1 linear unabhängig, so lässt sich (b_1, m_1) zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ erweitern. Nach dem Fortsetzungssatz existiert daher eine lineare Abbildung h mit $h(b_1) = b_2$ und $h(m_1) = m_2$. Folglich gilt:

$$h(g_1) = h(b_1 + m_1\mathbb{R}) = h(b_1) + h(m_1)\mathbb{R} = b_2 + m_2\mathbb{R} = g_2.$$

zu Aufgabe 4

1. *Vorbemerkung:* Das LGS $(*)$ lässt sich auf verschiedene Arten lösen.

   Das LGS $(*)$ hat zwar schon Zeilenstufenform. Setzt man im zugehörigen homogenen System $\xi_4 = 0$, so erhält man nur die triviale Lösung. Eine Möglichkeit ist die Wahl von $\xi_4 = 1$ und die Auflösung von unten her.

   Wir gehen allerdings anders vor.

   Substraktion der 3. von der 2.Zeile ergibt $\xi_2 + \xi_3 = 1$, und Subtraktion der neuen 2.Zeile von der 1.Zeile liefert $\xi_1 = 0$. Für ein beliebiges Element von L, dem Lösungsraum von $(*)$, gilt

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \xi_3 \\ \xi_3 \\ 1 - \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xi_3.$$

   Es folgt (nach PROBE!):

   $L = p + L_0$ mit $L_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ (Lösungsraum des homogenen Systems)

   und z.B. $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (einer Partikulärlösung).

2.
$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (= A).$$

3. Da A die Koeffizientenmatrix von $(*)$ ist und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die rechte Seite von $(*)$, erhält man L als das gesuchte volle Urbild.

4.
   - Die Koeffizientenmatrix A des LGS $(*)$ ist auch die Matrix der linearen Abbildung g. Mittels g lässt sich $(*)$ schreiben als $g(x) = b$ mit $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daher ist die Frage nach dem Urbild von b gleichbedeutend mit der Lösung von $(*)$.
   - Außerdem ist $A = M_C^B(f)$, also die darstellende Matrix von f bzgl. der gegebeneen Basen (vgl. 1.), und damit g die Darstellung von f bzgl. der Koordinatenvektoren.