Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe D6 (Punkt- und Geraden- Spiegelungen)

(a) Bestimmen Sie die Anzahl von Symmetrieachsen für regelmäßige n-Ecke.

(b) Es sei $3 \leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Anzahl $d(n)$ der Diagonalen eines konvexen n-Ecks.

Lösungsskizze:

Eine Gerade g ist genau dann Symmetrieachse eines regelmäßigen n-Ecks, wenn die Spiegelung an g eine Deckabbildung des n-Ecks ist.
Es seien $E_1, E_2, \dots, E_n$ die Ecken des regelmäßigen n-Ecks und M dessen Mittelpunkt. Dieser existiert, da die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt als Mittelpunkt des n-Ecks definiert werden kann. Insbesondere muss bei einer Deckspiegelung des n-Ecks M fix bleiben, woraus folgt, dass jede Symmetrieachse durch M führen muss. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) *1.Fall:* n ist gerade.
Dann sind $E_1E_{1+\frac{n}{2}}, E_2E_{2+\frac{n}{2}}, \dots, E_{\frac{n}{2}}E_n$ Symmetrieachsen des n-Ecks. Dies sind genau $\frac{n}{2}$ Symmetrieachsen. Ferner erhält man $\frac{n}{2}$ Symmetrieachsen, wenn man die Geraden durch die Mittelpunkte der Kanten zweier benachbarter Ecken und den Mittelpunkt des n-Ecks betrachtet. Weitere Symmetrieachsen gibt es nicht, da die n Eckpunkte durch eine Spiegelung an einer Symmetrieachse entweder fix bleiben oder auf eine der $n-1$ anderen Ecken des n-Ecks abgebildet werden müssen. Für gerades n hat ein n-Eck damit genau n Symmetrieachsen.

2.Fall: n ist ungerade.
Auch in diesem Fall gibt es n Symmetrieachsen. Wir betrachten eine davon exemplarisch. Sei g eine Gerade durch die Ecke E_1 und M. Dann schneidet g keinen weiteren Eckpunkt des n-Ecks, sondern geht durch den Mittelpunkt der Kante zwischen zwei anderen Ecken des n-Ecks und verletzt daher nicht die Forderung an eine Deckabbildung. g ist somit Symmetrieachse durch die Ecke E_1. Mit der Anzahl der Ecken des n-Ecks bekommen wir nun die Anzahl der Symmetrieachsen.
zu (b) Von jeder Ecke geht in einem konvexen n-Eck je eine Diagonale zu allen anderen Ecken außer zu sich selbst und zu ihren beiden Nachbarn aus, was pro Ecke $n-3$ Diagonalen ergibt. Zählt man die Diagonalen an allen n Ecken zusammen, kommt man auf $n(n-3)$ Diagonalen. Da jede Diagonale genau zwei Ecken verbindet, zählt man daher auf diese Weise jede Diagonale

genau zweimal, weshalb für die Anzahl der Diagonalen eines konvexen n-Ecks gilt:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2}. \qquad \square$$