Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

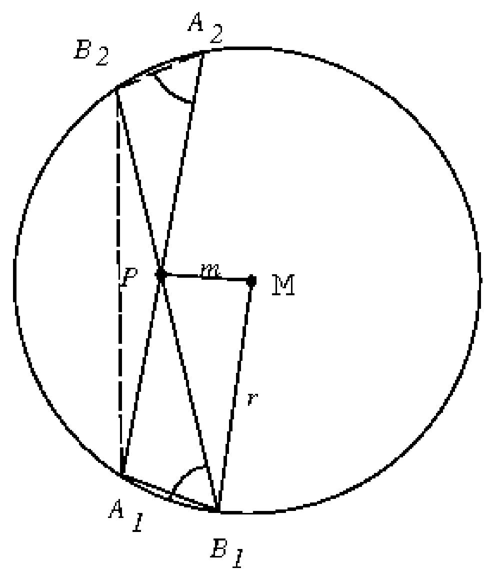
Aufgabe D5 (Ähnlichkeit, Sehnen am Kreis, Randwinkel)
Beweisen Sie elementargeometrisch durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung: Schneiden sich innerhalb eines Kreises (vom Radius r) zwei Sehnen $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{B_1B_2}$ in einem Punkt P (mit Abstand m vom Kreismittelpunkt), so gilt:

$$|\overline{PA_1}| \cdot |\overline{PA_2}| = |\overline{PB_1}| \cdot |\overline{PB_2}| = r^2 - m^2.$$

Lösungshinweis: Betrachten Sie zwei geeignete (ähnliche) Dreiecke! Sie dürfen ohne Beweis Winkelsätze am Kreis und Ähnlichkeitssätze für Dreiecke benutzen.

Lösungsskizze:

Man bezeichne den Mittelpunkt des Kreises mit M, die Länge des Radius mit r !
1. Fall: $P = M$. In diesem Fall ist $r = |\overline{A_1P}| = |\overline{PA_2}| = |\overline{B_1P}| = |\overline{PB_2}|$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.
2. Fall: $P \neq M$.
Man beachte zunächst, dass $\sphericalangle A_1PB_1 \equiv \sphericalangle B_2PA_2$ gilt, da sie Scheitelwinkel sind. Die Winkel $\sphericalangle PA_2B_2$ und $\sphericalangle PB_1A_1$ sind nach dem Randwinkelsatz gleich groß (sie sind Umfangswinkel über dem durch A_1B_2 festgelegten Bogen des Kreises mit Mittelpunkt M). Damit stimmen die beiden Dreiecke $\triangle B_1PA_1, \triangle A_2PB_2$ in zwei und somit sogar allen drei Winkelgrößen überein, sind also ähnlich. Aufgrund der Ähnlichkeit stimmen die Seitenverhältnisse entsprechender Seiten überein, d.h.



$|\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PB_1}}| = |\frac{\overline{PB_2}}{\overline{PA_2}}|$. Es folgt $|\overline{A_1P}| \cdot |\overline{PA_2}| = |\overline{B_1P}| \cdot |\overline{PB_2}|$. Wählt man nun B_1' und B_2' so, dass $P \in \overline{B_1'B_2'}$ und $PM \perp B_1'B_2'$, so folgt $|\overline{PB_1'}| = |\overline{PB_2'}| = \sqrt{r^2 - m^2}$ nach dem Satz des Pythagoras und daraus die restliche Behauptung.