Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe D3 (Punkt- und Geraden- Spiegelungen)
Zeigen Sie, dass eine Bewegung der euklidischen Ebene, die zwei Punkte P und Q (mit $P \neq Q$) vertauscht, eine Geraden- oder Punktspiegelung ist.

Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie verwenden, dass eine Bewegung mit zwei Fixpunkten die Identität oder eine Geradenspiegelung ist und dass eine Punktspiegelung sich als Produkt zweier Geradenspiegelungen mit geeigneten orthogonalen Achsen darstellen lässt.

Lösungsskizze:

Sei γ eine Bewegung, die P und Q vertauscht, und bezeichne $m = m_{\overline{PQ}}$ die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PQ}$ sowie $M = m \cap PQ$ deren Mittelpunkt.

Die Punktspiegelung δ_M mit Zentrum M vertauscht ebenfalls P und Q. Daher ist $\delta_M \circ \gamma$ eine Bewegung mit Fixpunkten P und Q, also gleich der Identität oder der Geradenspiegelung γ_{PQ} an der Geraden PQ. Es folgt: Entweder ist $\gamma = \delta_M^{-1} = \delta_M$, also eine Punktspiegelung, oder $\gamma = \delta_M^{-1} \circ \gamma_{PQ} = \delta_M \circ \gamma_{PQ}$.

Die Punktspiegelung δ_M hat auch die Darstellung $\delta_M = \gamma_m \circ \gamma_{PQ}$ (Produkt von Geradenspiegelungen mit orthogonalen Achsen), womit im 2.Fall

$$\gamma = (\gamma_m \circ \gamma_{PQ}) \circ \gamma_{PQ} = \gamma_m$$

folgt, also eine Geradenspiegelung vorliegt. $\square$