

**Aufgabe zum Lehrkräftefortbildungskurs
“Lineare Algebra/Analytische Geometrie II” vom 6.3.2024
als Vorlesungs-Ersatz 14:40-15.40**

Bitte bearbeiten Sie die Seiten 71 bis 73 aus dem Lineare-Algebra-II-Skript, also das Modell der Entwicklung einer Käferpopulation (Fortsetzung des Beispiels 10.a Anmerkung 4 des Lineare-Algebra-I-Skripts Seite 132).

Hierbei interessiert die Abbildung $v_m \mapsto T \cdot v_m$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Als weitere Pflicht-Aufgabe bitte ich um die Beantwortung folgender Frage per E-Mail an rhschulz@zedat.fu-berlin.de

Unter welcher Bedingung an $s_1 s_2 s_3$ existiert eine Käferpopulation v und ein Generationswechsel von v zu $T(v)$, bei dem die Anzahl der Eier, Larven, Käfer je um 10% reduziert wird, also mit

$$Tv = 0,9 v.$$

Bitte nur diese Bedingung angeben! Abgabe bitte bis 6.3.24, 18 Uhr

Lösungshinweis:

Die Bedingung ist erfüllt, falls $T - 0,9E_3$ singularär ist, also $\det(T - 0,9E_3) = 0$ gilt.

Lösungskizze:

Es gilt:

$$\exists v \neq 0 : T \cdot v = 0,9v \Leftrightarrow \det(T - 0,9E_3) = 0 \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} -0,9 & 0 & s_3 \\ s_1 & -0,9 & 0 \\ 0 & s_2 & 0,9 \end{vmatrix} = -0,9^3 + s_3 s_1 s_2,$$

also $s_1 s_2 s_3 = 0,9^3 = 0,729$ (und $s_i > 0$ für $i = 1, 2, 3$).

Anmerkung:

Die Antwort $s_1 = s_2 = s_3 = 0,9$ gibt nur *einen* der möglichen Fälle an.

Eine weitere Lösung unter vielen ist z.B. die folgende:

$$s_1 = 0,3, \quad s_2 = 0,9 \quad \text{und} \quad s_3 = 2,7$$

mit der Ausgangsverteilung $v = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ und mit $Tv = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Beispiel einer falschen Antwort:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9s_3 \\ 0,9s_1 \\ 0,9s_2 \end{pmatrix}.$$

Nur wenn s_1, s_2 oder s_3 Null ist, wird die Det. Null.

Aufgabe: Was ist bei dieser Antwort alles falsch, abgesehen davon, dass die gestellte Frage nicht beantwortet wurde.?