

## Einige Themen zur Wiederholung beim Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Sehen Sie sich dabei auch die (zum Teil weggelassenen) Voraussetzungen der Sätze<sup>1</sup> an!

\* Def.  $X \oplus Y$  für UR's  $X, Y$  von  $V$ ; Eigenschaften?

- Ein Element  $\lambda \in K$  heißt **Eigenwert** der Abbildung  $f \in \text{End } V$  (bzw. der Matrix  $M \in K^{(n,n)}$ ), wenn es ein  $x \in V \setminus \{0\}$  (genannt **Eigenvektor**) gibt mit  $f(x) = \lambda x$  ( bzw. wenn es ein  $x \in K^{(n,1)} \setminus \{0\}$  gibt mit  $Mx = \lambda x$ ). (28.1)

Der **Eigenraum**  $\text{Eig}(f, \lambda)$  (bzw.  $\text{Eig}(M, \lambda)$ ) von  $f$  (bzw.  $M$ ) ist definiert als die Menge der Eigenvektoren von  $f$  bzw.  $M$  zum Eigenwert  $\lambda$  vereinigt mit dem Nullvektor. Der Eigenraum ist ein Unterraum von  $V$ . (28.4)

- Das **charakteristische Polynom**  $\chi_M$  einer Matrix  $M \in K^{(n,n)}$  ist wie folgt definiert:  $\chi_M(x) = \det(M - xE_n)$ . Seine Nullstellen sind genau die Eigenwerte von  $M$ . (28.5) Es gilt  $\chi_M(M) = 0$  (Satz von Cayley-Hamilton) (28.10)

Entsprechendes gilt für einen Endomorphismus  $f$  mit  $\chi_f(x) = \det(f - x \text{id}_V)$ .

- Das **Minimalpolynom**  $H_M$  von  $M$  ist definiert als das vom Nullpolynom verschiedene normierte Polynom minimalen Grades, für das  $H_M(M) = 0$  gilt. Es teilt  $\chi_M$  und hat genau alle Eigenwerte von  $M$  als Nullstellen, evtl. in anderer Vielfachheit als  $\chi_M$ . (28.12/28.14)

- Eine Matrix  $M \in K^{(n,n)}$  heißt **diagonalähnlich**, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist. Ist sie Matrix eines Endomorphismus  $f$  von  $V$ , so gibt es eine Basis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ , eine  $f$ -Eigenbasis. (29.2)

Eine Matrix  $M$  ist nach (29.2/29.3) genau dann diagonalähnlich, wenn  $\chi_M$  in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert  $\lambda$  die algebraische Vielfachheit (Vielfachheit des Faktors  $(X - \lambda)$ ) gleich der geometrischen Vielfachheit (Dimension von  $\text{Eig}(M, \lambda)$ ) ist.

Eine Matrix  $M$  ist nach einem Satz auch genau dann diagonalähnlich, wenn  $H_M$  in verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

---

<sup>1</sup>z.B.  $K$  beliebiger Körper oder  $K = \mathbb{K}$ ,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum bzw.  $V = K^{(n,1)}$

- Ein **Skalarprodukt**  $\Phi$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum (mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) ist laut Definition im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  eine positiv definite *symmetrische Bilinearform auf*  $V$ , im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform. (31.1). Insbesondere ist  $\Phi$  linear in der 1. Komponente, und es gilt:  $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$  für alle  $x, y \in V$ . Zudem ist  $\Phi$  positiv definit, d.h. es gilt  $\Phi(x, x) \geq 0$  für alle  $x \in V$  und  $\Phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Es heißt  $(V, \Phi)$  dann **Prähilbertraum**, im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **euklidischer (Vektor-)Raum**, im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  **unitärer Raum**.
- Bzgl. einer Basis  $B = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  lässt sich ein Skalarprodukt  $\Phi$  wie jede Sesquilinearform mittels einer Matrix (**Fundamentalmatrix**)  $M_B(\Phi)$  darstellen:  $\Phi(x, y) = M_B(x)^T \cdot M_B(\Phi) \cdot \overline{M_B(y)}$ . Hierbei ist  $M_B(\Phi) = (\Phi(b_i, b_j))_{i,j=1, \dots, n}$ . (30.4)  
Das kanonische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^{(n,1)}$  ist definiert als  $\Phi(x, y) = x^T y$ , und auf  $\mathbb{C}^{(n,1)}$  als  $\Phi(x, y) = x^T \overline{y}$ .
- Ist  $\Phi$  Skalarprodukt auf  $V$ , so ist die  $\Phi$ -**Orthogonalität** wie folgt definiert:  $x \perp_{\Phi} y \Leftrightarrow \Phi(x, y) = 0$  (für  $x, y \in V$ ); die Menge aller zu allen Elementen einer Teilmenge  $U$  von  $V$  orthogonalen Vektoren  $V^{\perp_{\Phi}}$  bildet einen Unterraum, den **Orthogonalraum** zu  $U$ . Ist  $U$  endlich-dimensionaler Unterraum von  $V$ , so ist  $U^{\perp_{\Phi}}$  **orthogonales Komplement** von  $U$  in  $V$ , also  $V = U \oplus U^{\perp_{\Phi}}$ .
- Eine Familie  $(e_i)_{i \in I}$  heißt  $\Phi$ -**Orthonormalsystem**, falls jeder Vektor  $e_i$  Norm 1 hat ( $\|e_i\| = 1$ ) und je zwei Vektoren orthogonal sind ( $\Phi(e_i, e_j) = 0$  für  $i \neq j$ ). Jedes  $\Phi$ -Orthonormalsystem  $(e_i)_{i \in I}$  ist linear unabhängig, und es gilt  $x = \sum_{i \in I} e_i \Phi(x, e_i)$ . Die Fundamentalmatrix eines Skalarprodukts bezüglich einer Orthonormalbasis in einem endlich-dimensionalen Prähilbertraum ist die Einheitsmatrix.
- Eine **lineare Isometrie** zwischen zwei Prähilberträumen über  $\mathbb{K}$  ist definiert als längentreuer Homomorphismus (bzw. äquivalent dazu: abstandstreuer oder mit den Skalarprodukten verträglicher Homomorphismus). Eine lineare Isometrie ist injektiv (und zwischen Vektorräumen gleicher endlicher Dimension damit bijektiv). Ist  $A$  die darstellende Matrix eines Endomorphismus  $f$  bezüglich Orthonormalbasen in einem endlich-dimensionalen Prähilbertraum, so ist  $f$  genau dann Isometrie, wenn  $A$  unitär bzw. orthogonal ist, also  $\overline{A}^T A = E$  gilt.

Weitere Themen:

- Orthonormierungsverfahren von Gram-Schmidt
- Parallelprojektion, Orthogonalprojektion
- Winkelmaß, Kosinussatz, Satz des Pythagoras